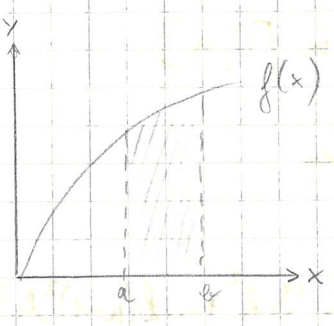
1. Das bestimmte Integral

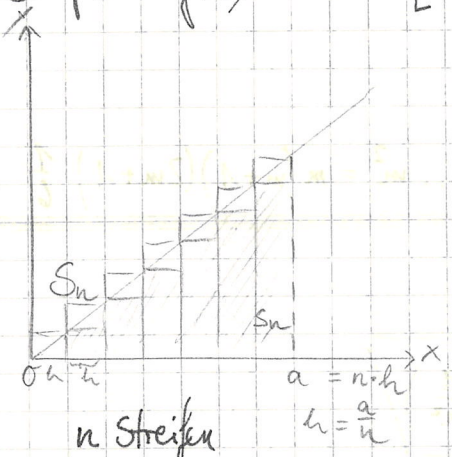
1.1. Der Flächeninhalt einer ebenen Figur

Problem der Integralrechnung

Sprechweise: „Fläche unter der Kurve in $[a;b]$"



1. Beispiel: $f(x) = x$ in $[0;a]$



n Streifen

$h = \frac{a}{n}$

s_n: untere Treppenfläche

S_n: obere Treppenfläche

$$s_n < A < S_n$$

$$s_n = h \cdot h + h \cdot 2h + h \cdot 3h + \ldots + h \cdot (n-1)h$$

$$s_n = h^2 (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1))$$

Summenformel: $\boxed{\frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$

n Anzahl der Glieder

a_1 1. Glied

a_n letztes Summand

$$s_n = h^2 \frac{n-1}{2} (1 + (n-1))$$

$$s_n = h^2 \frac{n-1}{2} n$$

$$s_n = \frac{a^2}{n^2} \frac{n-1}{2} n = \boxed{\frac{a^2}{2} \cdot \frac{(n-1)}{n}}$$

$$S_n = h \cdot h + h \cdot 2h + \ldots + h \cdot nh$$

$$S_n = h^2 (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$$

$$S_n = h^2 \frac{n}{2} (1+n) = \frac{a^2}{n^2} \frac{n}{2} (1+n) =$$

$$= \boxed{\frac{a^2}{2} \cdot \frac{(n+1)}{n}}$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a^2}{2} \cdot \frac{(n-1)}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a^2}{2} \frac{1 - \frac{1}{n}}{1} = \frac{a^2}{2}$$

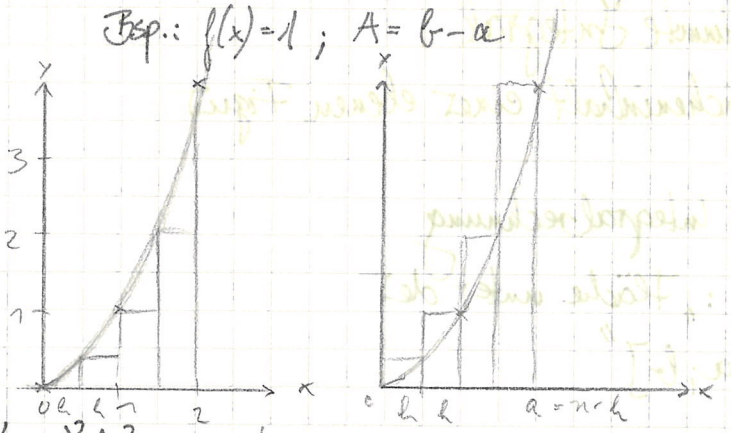
$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a^2}{2} \frac{(n+1)}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a^2}{2} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1} = \frac{a^2}{2}$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} S_n \Rightarrow A = \frac{a^2}{2}$$

Folgerung: $f(x) = x$ in $[a;b]$

$$\boxed{A = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}}$$

Bsp.: $f(x) = 1$; $A = b - a$



Bsp.: $f(x) = x^2$ in $[0; a]$

Berechnung der unteren Treppenfläche:

$S_n = h \cdot h^2 + h \cdot 4h^2 + h \cdot 9h^2 + \ldots + h \cdot (n-1)^2 h^2$

$S_n = h^3 \left(1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + (n-1)^2\right)$ *

$\left(\sum_{v=1}^{m} v^2\right)$

$1 + 4 + 9 + \ldots m^2 = m(m+1)(2m+1)\frac{1}{6}$!

$S_n = \frac{a^3}{n^3}(n-1)\,n\,(2n-1)\frac{1}{6} =$

$= \frac{a^3}{6}\,\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$

$S_n = \frac{a^3}{6}\,\frac{2n^2 - 2n - n + 1}{n^2} = \frac{a^3}{6}\,\frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2} = \boxed{\frac{a^3}{6}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{a^3}{6}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{a^3}{3}$

$S_n = h \cdot h^2 + h \cdot 4h^2 + h \cdot 9h^2 + \ldots h n^2 h^2 = h^3\left(1 + 4 + 9 + \ldots + n^2\right)$

$S_n = \frac{a^3}{n^3}\left(n(n+1)(2n+1)\right)$

$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a^3}{3} = \lim_{n \to \infty} s_n \quad \Rightarrow \quad A = \frac{a^3}{3}$

Verallgemeinerung: $f(x) = x^2$ in $[a; b]$

$$\boxed{A = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}}$$

Hausaufgabe: $f(x) = x^3$ in $[0; a]$

$$\boxed{1 + 2^3 + 3^3 + \ldots n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

Hausaufgabe: $f(x) = x^3$ in $[0; a]$

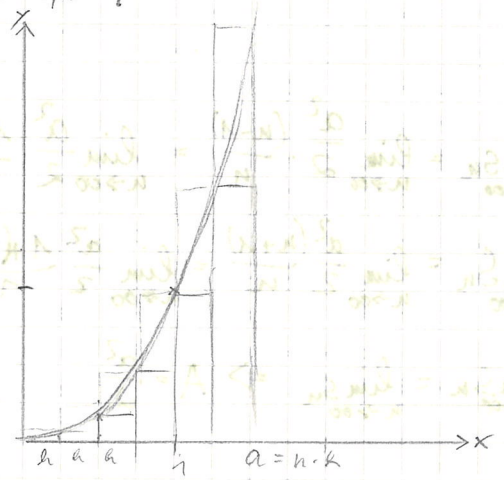
Berechnung der unteren Treppenfläche:

$S_n = h \cdot h^3 + h \cdot 8h^3 + h \cdot 27h^3 + \ldots + h \cdot (n-1)^3 h^3 =$

$= h^4\left(1 + 8 + 27 + \ldots (n-1)^3\right) =$

$= \frac{a^4}{n^4}\,\frac{(n-1)^2 (n)^2}{4} = \frac{a^4}{4}\,\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2} = \frac{a^4}{4}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

$\lim_{n \to \infty} \frac{a^4}{4}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{a^4}{4}$



Berechnung der oberen Treppenfläche:

$$S_n = h\cdot h^3 + h\cdot 2^3h^3 + h\cdot 3^3h^3 + \dots + h\cdot n^3\cdot h^3 = h^4\,(1+8+27+64\dots+n^3) =$$

$$= \frac{a^4}{n^4}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) = \frac{a^4}{4}\,\frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{a^4}{4}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^4}{4}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{a^4}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a^4}{4} = \lim_{n\to\infty} S_n \qquad \boxed{A = \frac{a^4}{4}}$$

Verallgemeinerung:

$f(x) = x^3$ in $[a;b]$

$$A = \boxed{\frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}}$$

Zusammenfassung:

$f(x) = 1$; $A = b - a$

$f(x) = x$; $A = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

$f(x) = x^2$; $A = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

$f(x) = x^3$; $A = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$

Benutzung des Summenzeichens

Bsp.: $1+2+3+4+\dots+\nu+\dots+n = \sum_{\nu=1}^{n}\nu$

$$1+2^2+3^2+\dots+n^2 = \sum_{\nu=1}^{n}\nu^2$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

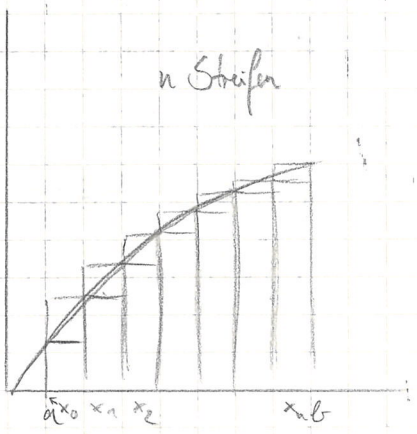
1.2. Das bestimmte Integral

allgemeine Überlegungen für $y = f(x)$ in $[a;b]$

$f(x)$ sei beschränkt und monoton wachsend

Streifenbreite: $h = x_{\nu+1} - x_\nu = \Delta x$

Berechnung der Untersumme



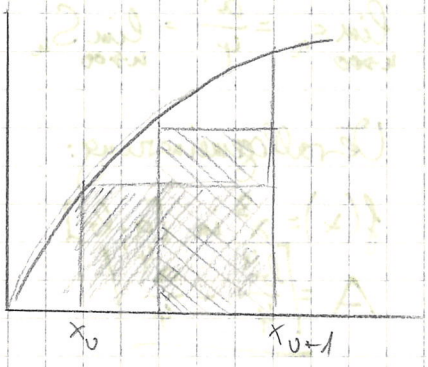
$s_n = \Delta x \cdot f(x_0) + \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(x_{n-1})$

$s_n = \Delta x \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} f(x_\nu)$

~~$S_n = \Delta x \cdot$~~ Berechnung der Obersumme:

$S_n = \Delta x \cdot \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)$

$s_n < A < S_n$



s_n ist nach oben beschränkt, S_n ist nach unten beschränkt

s_n steigt monoton (siehe Zeichnung)

S_n fällt monoton

Es folgt:

$\lim_{n\to\infty} s_n$, $\lim_{n\to\infty} S_n$ existieren

zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n$ oder $\lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = 0$

$S_n - s_n = \Delta x \left(\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) - \sum_{\nu=0}^{n-1} f(x_\nu) \right) = \Delta x \left(f(x_n) + f(x_2) + \dots f(x_n) - f(x_0) - f(x_1) - \dots f(x_{n-1}) \right)$

$= \left[f(x_n) - f(x_0) \right] \Delta x$

$S_n - s_n = \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\text{Nullfolge}} \underbrace{\left(f(b) - f(a) \right)}_{\text{beschränkt}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = 0$

Also:

$A = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$

Definition: Es sei f eine monotone und beschränkte Fkt. mit $D = [a;b]$; dann haben die Unter- und Obersummen den selben Grenzwert und man schreibt

$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \int_a^b f(x)\,dx$ (Integral $f(x)\,dx$ von a bis b)

$\int_a^b f(x)\,dx$ heißt das bestimmte Integral der Fkt. $f(x)$ in d. $[a;b]$

a heißt untere Integrationsgrenze

b " obere "

$f(x)$ heißt Integrand

x heißt Integrationsvariable

C. Klemm, Blumenstr. 6, 8901 Kissing

Beispiele:

1. $A = \int_a^b 1\,dx = b - a$ $\quad (f(x) = 1)$

$A = \int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$ $\quad (f(x) = x)$

3. $A = \int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$ $\quad (f(x) = x^2)$

4. $A = \int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$ $\quad (f(x) = x^3)$

$$\int_0^7 x^2\,dx = \frac{7^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{343}{3} = 114\frac{1}{3}$$

1.4. Sätze über bestimmte Integrale

Vergleich: $\int_a^b f(x)\,dx$

$\int_b^a f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad (\Delta x = x_{\nu+1} - x_\nu)$$

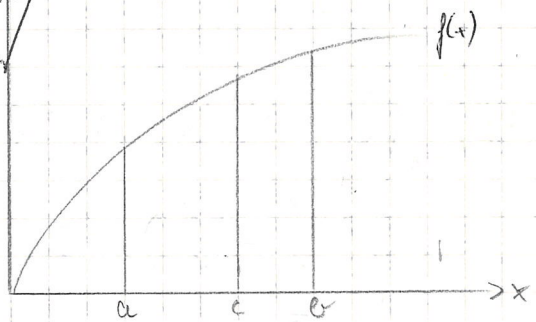
Vertauscht man die Integrationsgrenzen, so wechselt das Integral das Vorzeichen!

$\int_1^7 dx = 7 - 1 = 6$ $\qquad$ $\int_7^1 dx = \frac{1}{1} - \frac{7}{1} = -6$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Ein Integral mit gleicher oberer und unterer Grenze hat den Wert 0!

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



$a < c < b$

Das Integral über den ganzen Bereich ist gleich der Summe der Integrale über den Teilbereichen!

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Beweis: $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{n} k \cdot f(x_\nu)\right]\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[k \cdot \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\right]\cdot\Delta x =$

$$= k \cdot \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\right]\cdot\Delta x = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Hat der Integrand einen konstanten Faktor, dann kann dieser vor das Integral gezogen werden

$$\boxed{\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx}$$

~~Beweis: $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx \overset{ax.}{=} \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{v=1}^{n} f(x_v) + \sum_{v=1}^{n} g(x_v)\right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{v=1}^{n} f(x_v) +$~~

~~$+\lim_{n\to\infty}\sum_{v=1}^{n} g(x_v) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$~~

Beweis: $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{v=1}^{n}\left(f(x_v)+g(x_v)\right)\right]\Delta x =$

$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{v=1}^{n} f(x_v) + \sum_{v=1}^{n} g(x_v)\right]\Delta x =$

$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{v=1}^{n} f(x_v)\cdot\Delta x + \Delta x \lim_{n\to\infty}\sum_{v=1}^{n} g(x_v)\right] =$

$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

$\int_1^4 3x\,dx = 3\cdot\int_1^4 x\,dx = 3\left(-\frac{1}{2}+\frac{16}{2}\right) = \frac{45}{2}$

~~187~~/1 b, c, d, f

1b) $\int_0^3 4x^2\,dx = 4\int_0^3 x^2\,dx = 4\left(\frac{27}{3}\right) = 36$

1c) $\int_0^{\sqrt{c}} \frac{x^2}{c}\,dx = \frac{1}{c}\int_0^{\sqrt{c}} x^2\,dx = \frac{1}{c}\cdot\frac{(\sqrt{c})^3}{3} = \frac{\sqrt{c}}{3}$

1d) $\int_{-1}^{2}(1+x+x^2)\,dx = \int_{-1}^{2} dx + \int_{-1}^{2} x\,dx + \int_{-1}^{2} x^2\,dx = 3 + 2 - \frac{1}{2} + \frac{8}{3} + \frac{1}{3} =$

$= \frac{30}{6} - \frac{3}{6} + \frac{16}{6} + \frac{2}{6} = \frac{45}{6}$

1f) $\int_{-1}^{-2}(3x-2)^2\,dx = \int_{-1}^{-2}(9x^2-12x+4)\,dx = \int_{-1}^{-2} 9x^2\,dx - \int_{-1}^{-2} 12x\,dx + \int_{-1}^{-2} 4\,dx =$

$= 9\left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) - 12\left(\frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) + 4(-1) = 9\left(\frac{-7}{3}\right) - 12\left(\frac{3}{2}\right) - 4 =$

$= \frac{-63}{3} - \frac{54}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{129}{3} = -43$

63
54
12
129
43
33

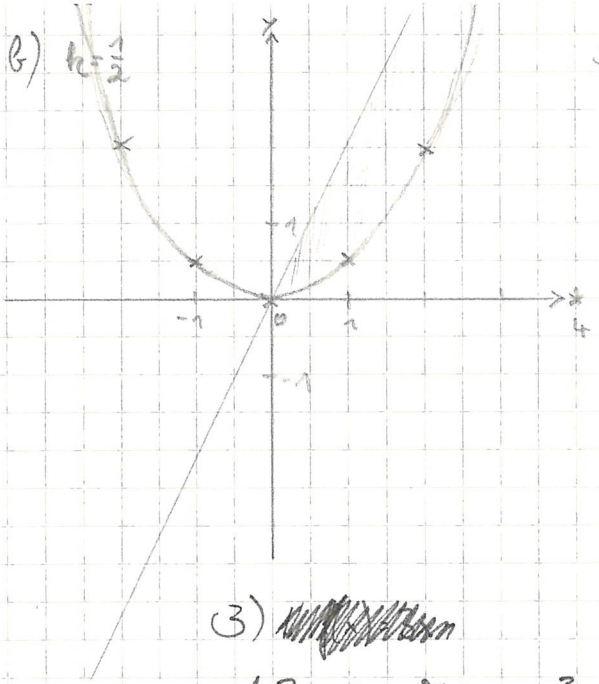
S. 187/2 a)

1. $f_1(x) = 2x$
2. $f_2(x) = kx^2$

Berechnung des Schnittpunkts: $2x = kx^2$; $x = \frac{2}{k}$ für $x \neq 0$

1. Fall: $x = 0$ $\quad S_1(0|0)$
2. Fall: $x = \frac{2}{k}$ $\quad S_2\left(\frac{2}{k}\,\middle|\,\frac{4}{k}\right)$

b) $k=\frac{1}{2}$



S(4|8)

c) $A=\int_0^{\frac{2}{k}} 2x\,dx - \int_0^{\frac{2}{k}} kx^2\,dx =$

$= 2\int_0^{\frac{2}{k}} x\,dx - k\int_0^{\frac{2}{k}} x^2\,dx =$

$= 2\left(\frac{\left(\frac{2}{k}\right)^2}{2}\right) - k\frac{\left(\frac{2}{k}\right)^3}{3} = \frac{4}{k^2} - \frac{\frac{8}{k^3}\cdot k}{3} =$

$= \frac{4}{k^2} - \frac{8}{k^2\cdot 3} = \frac{4-8\cdot\frac{1}{3}}{k^2} = \frac{4}{3k^2}$

3) [redacted]

1. $3x-2y=0;\ y=+\frac{3}{2}x$

2. $y=\frac{1}{2}x^2$

$\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}x^2;\ \frac{3}{2}=\frac{1}{2}x;\ x=3$

$S_1(0|0);\ S_2(3|4{,}5)$



$A=\int_0^3 \frac{3}{2}x\,dx - \int_0^3 \frac{1}{2}x^2\,dx =$

$= \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}3\right)^3\frac{1}{3} = \frac{3\cdot 9}{4} - \frac{18}{4} =$

$= \frac{27\cdot 9\cdot 3}{12} - \frac{18}{12} = \frac{63}{12} = \frac{9}{4}$

187/4

$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$?

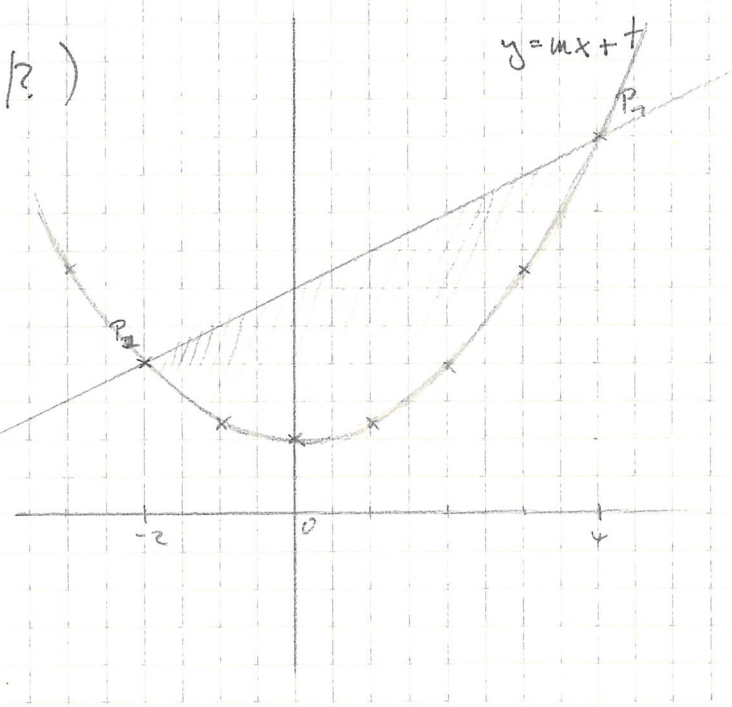
187/4

geg.: $f(x)=\frac{1}{4}x^2+1;\ P_1(4|?);\ P_0(-2|?)$

$P_1(4|5),\ P_0(-2|2)$

$y=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0) =$

$= 2+\frac{5-2}{4+2}(x+2) = \frac{1}{2}x+3$

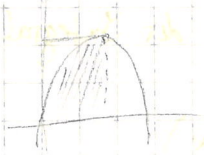


$A=-\int_{-2}^{4}\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)dx + \int_{-2}^{4}\left(\frac{1}{2}x+3\right)dx =$

$= -\int_{-2}^{4} 3\,dx + \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} x - \int_{-2}^{4} dx -$

$-\frac{1}{4}\int_{-2}^{4} x^2\,dx = 9$

187/5



$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$

$f'(x) = -\frac{2}{3}x + 2$

$-\frac{2}{3}x + 2 = 0 \; ; \; \frac{2}{3}x = 2 \; ; \; x = 3$

$f''(x) = -\frac{2}{3}$ ($\Rightarrow$ Maximum)

$\int_0^3 (-\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1)\,dx = \int_0^3 -\frac{1}{3}x^2\,dx + \int_0^3 2x\,dx + \int_0^3 dx =$

$= -\frac{1}{3}(\frac{3^3}{3}) + 2\frac{3^2}{2} + 3 = \underline{\underline{9}}$

2. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

2.1. Die Stammfunktion zu einer Funktion

Beispiele:

$F(x) = x^2$

$\Rightarrow F'(x) = f(x) = 2x$

Umgekehrt:

$f(x) = 2x$

$\Rightarrow F(x) = x^2 (+c)$

~~$f(x) = x^2$ ist~~ $F(x) = x^2$ ist eine Stammfkt. von $f(x) = 2x$

$F(x) = \cos x$

$f(x) = -\sin x$

geg.: $f(x) = -\sin x$

ges.: $F(x)$

$F(x) = \cos x$ ist Stammfkt. von $f(x) = -\sin x$

Definition:

Eine Stammfkt. zu einer Fkt. f ist eine differenzierbare Fkt. F, für die gilt:

$F'(x) = f(x)$

Lehrsatz: Ist $F(x)$ eine Stammfkt von $f(x)$, so ist auch $F(x) + c$ eine Stammfkt. $c \in \mathbb{R}$

Grundformeln der Integralrechnung

$f(x) = F'(x)$	$F(x)$	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$n \in \mathbb{R}; n \neq -1$
$+\cos x$	$\sin x + c$	
$+\sin x$	$-\cos x + c$	

Bestimme die Stammfkt.!

1. $f(x) = -2x$; $F(x) = -2 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = -x^2 + c$
2. $f(x) = 2x^2$; $F(x) = 2 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{2}{3}x^3 + c$
3. $f(x) = 12x^{-3}$; $F(x) = 12\frac{x^{-2}}{-2} + c = -6x^{-2} + c$
4. $f(x) = \sin x - 1$; $F(x) = -\cos x - x + c$
5. $f(x) = 2x - \sin x$; $F(x) = \cos x + x^2 + c$
6. $f(x) = (2-x)^2$; $F(x) = \frac{(2-x)^3}{3} \cdot (2x - x^2) + c$ ≠

   $f(x) = 4 - 4x + x^2$; $F(x) = 4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} + c$
7. $f(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^2} + 1 = 4x^{-3} - 3x^{-2} + 1$

   $F(x) = 4\frac{x^{-2}}{-2} - 3\frac{x^{-1}}{-1} + x = -2x^{-2} + 3x^{-1} + x + c$
8. $f(x) = \sqrt{3} \cdot x^{n-1}$

   $F(x) = \sqrt{3} \cdot \frac{x^n}{n} + c$

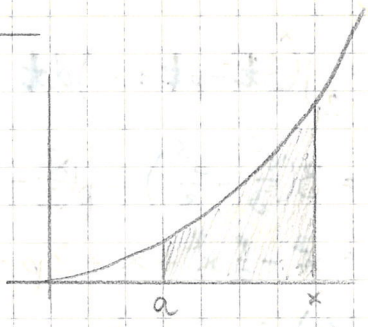
Definition: Man bezeichnet die Menge aller Stammfkt. von $f(x)$ als das unbestimmte Integral von f und schreibt $\int f(x)dx = F(x) + c$

$\int 2x\,dx = x^2 + c$ $\quad \int \cos x\,dx = \sin x + c$ $\quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

Das Integral als Fkt. der oberen Grenze (Integralfkt.)

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

$$\int_a^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$



198/1/2.

Beispiel f. Integralfkt.

$$\int_c^x 3t^2\,dt = 3\left(\frac{x^3}{3} - \frac{c^3}{3}\right) = x^3 - c^3$$

198/1

$$F_1(x) = \int_{-1}^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}$$

$$F_2(x) = \int_0^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3}$$

$$F_3(x) = \int_1^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} - \frac{1^3}{3}$$

$$F_4(x) = \int_2^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} - \frac{2^3}{3}$$

198/2

a) $F(x) = \int_a^x dt = x - a$ $\qquad P(-3|0)$

$x - a = 0$; $a = -3$

β) $F(x) = \int_a^x t\,dt = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}$ $\qquad Q(0|-2)$

$-\frac{a^2}{2} = -2$; $a = \pm 2$

c) $F(x) = \int_a^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3}$ $\qquad R\left(3\,\middle|\,6\tfrac{1}{3}\right)$

$6\frac{1}{3} = 9 - \frac{a^3}{3}$

$-\frac{a^3}{3} = \frac{19}{3} - \frac{27}{3}$; $a^3 = 27 - 19 = 8$; $a = \sqrt[3]{8} = 2$

Definition:

Es sei $f(x)$ über $[a;b]$ integrierbar. Bei festem c wird durch das Integral $\int_c^x f(t)\,dt$ eine Fkt. $G(x)$ definiert, die man als Fkt. der oberen Grenze oder Integralfkt. bezeichnet.

Beispiel: $G(x) = \int_c^x 3t^2\,dt = x^3 - c^3$

$$G'(x) = 3x^2$$

1983

$G_1(x) = \int_2^x (3t^2 - pt + 1)\,dt =$

$= 3\left(\frac{x^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right) - p\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) + x - 2 = x^3 - 8 - \frac{p}{2}x^2 + 2p + x - 2 =$

$= x^3 - \frac{p}{2}x^2 + x + 2p - 10$

$P(3|0)$ in $G_1(x)$

$0 = 27 - \frac{p}{2}9 + 3 + 2p - 10$

$p = 8$

$G_1(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

Weitere Nullstellen:

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-3)(x^2 + x - 2)$

$-(x^3 - 3x^2)$

$-x^2 + x$

$-(-x^2 + 3x)$

$-2x + 6$

$-(-2x + 6)$

0

$x^2 + x - 2 = (x-2)(x+1)$

$-(x^2 - 2x)$

$x - 2$

$-(x-2)$

0

$G_1(x) = x^3 - \frac{p}{2}x^2 + x + 2p - 10$

$R(-2|0)$

$-8 - 2p - 2 + 2p - 10 = 0$

$-20 = 0$ (f)

$\Rightarrow R(-2|0) \notin f_p\, G(x)$

c)

~~$G_{1_1}(x) = \frac{x^3}{1} - \frac{p}{2}x^2 + x + 2p - 10 = \frac{x^3}{1} - \frac{q}{2}x^2 + x + 2q - 10$~~

$x^3 - \frac{p}{2}x^2 + x + 2p - 10 = x^3 - \frac{q}{2}x^2 + x + 2q - 10$

$-\frac{p}{2}x^2 + 2p = -\frac{q}{2}x^2 + 2q$

$-px^2 + 4p = -qx^2 + 4q$

$qx^2 - px^2 = 4q - 4p$

$(q-p)x^2 = (q-p)4$

$x_{1/2} = \pm 2$

$P_1(2|0)$ $P_2(-2|-20)$

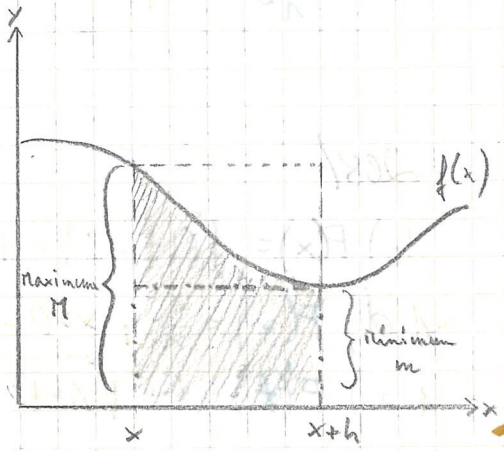
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Fkt. $f(x)$ sei in $[a;b]$ stetig. Dann ist die Integralfkt. $G(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ mit $c \in [a;b]$ für alle $x \in [a;b]$ differenzierbar und es ist $G'(x) = f(x)$

Beweis: $G'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h}$; $h > 0$

$G(x+h) = \int_c^{x+h} f(t)\,dt$

$G(x+h) - G(x) = \int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^{x} f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$



$$m \cdot h \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq M \cdot h$$

$$m \leq \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \leq M$$

$\downarrow h \to 0$

$$f(x) \leq G'(x) \leq f(x)$$

also $\boxed{G'(x) = f(x)}$

Beispiele: $G(x) = \int_c^x \sin t\,dt$

$G'(x) = \sin x$

$G(x) = \int_c^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} - \frac{c^3}{3}$; $G'(x) = x^2$

[HDJ]: $G'(x) = x^2$

$f(x) = 2x$

$G(x) = \int_c^x 2t\,dt = x^2 - c^2$ mit $-c^2 \in \mathbb{R}_0^-$

$G'(x) = 2x$ (Integralfkt. ist Stammfkt.)

Bestimmung der Menge der Stammfkt.

$F(x) = 2\frac{x^2}{2} + C = x^2 + C$

LS: Die Menge der Integralfkt. ist eine Teilmenge der Menge der Stammfkt.

$F(x) = \int_1^3 t^2 dt \,;\, F' = 0$

Hausaufgabe: 208/1c,d,e

208/

1c) $F(x) = \int_a^x (|t-3| - t^4)\, dt$; $F'(x) = |x-3| - x^4$

1d) $F'(x) = \frac{1}{x}$; $x > 0$

1e) $F'(t) = t + \sqrt{1+t^2}$

2.3. Anwendung des Hauptsatzes auf die Berechnung des bestimmten Integrals

gesucht: $\int_a^b f(t)\, dt$

$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ sei Integralfkt.

$F(x)$ sei Stammfkt. von f

$G(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) + C$

Bestimmung von C:

Wähle $x = a$

$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C$

$C = -F(a)$

$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$

Setze $x = b$

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$$

Beispiel: $\int_a^b \cos t\,dt = \sin b - \sin a$

$$\int_a^b t^n dt = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$$

$$\int_a^b t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Allgemein:

$$\int_a^b f(t)dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_1^3 \frac{2}{x^3}\,dx = \left[2\,\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^3 = \left[-x^{-2}\right]_1^3 = -\frac{1}{9} + 1 = \frac{8}{9}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 1 + 1 = 2$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos\right]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0$$

Integrationstabelle

$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
$\cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$

$$\int_{-1}^{1} x \cdot |x|\,dx$$

Fallunterscheidung: $x \geq 0$

$$\int_{-1}^{1} x|x|\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$x < 0$

$$\int_{-1}^{1} x|x|\,dx = \int_{-1}^{1} -x^2\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{3} - \left(-\frac{(-1)^3}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

AHEM... !

$$\int_{-1}^{1} x|x|\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

208/5

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

(1) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c - \frac{1}{4} + \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c =$$

$$= \frac{2}{3}a + 2c = 0 \qquad \frac{a}{3} + c = 0$$

(2) $F(1) = 1$ mit $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

~~$F(x) = \int_0^1 (x^2 + ax + b + c)\,dx$~~

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{b}{2} = 1 \;;\; b = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(1) = 3 + 2a + b = 0$

$3 + 2a + \frac{6}{4} = 0$

$2a = -3 - \frac{6}{4} =$

$-a = \frac{18}{2 \cdot 4}$

$a = \frac{9}{4}$

$-\frac{a}{3} + c = 0$

$c = +\frac{a}{3} = +\frac{9}{4 \cdot 3} = +\frac{3}{4}$

$f(x) = x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{6}{4}x + \frac{3}{4}$

209/7a

$f(x) = 1 - \sin x$

$F(x) = x + \cos x + c$

$F(0) = 1 + c = 2$

$c = 1$

$F(x) = x + \cos x + 1$

b)

$f(x) = \sin x + \cos x$

$F(x) = \int (\sin x + \cos x)\,dx = -\cos x + \sin x + c$

$F(\pi) = -\cos\pi + \sin\pi + c = +1 + c = -3$

$c = -4$

$F(x) = \sin x - \cos x - 4$

c)

$f(x) = x + \sin x$

$F(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + c$

$F(0) = -1 = 0 + c$

$c = -1$

$F(x) \frac{x^2}{2} - \cos x - 1$

d)

$f(x) = 2x - \cos x$

$F(x) = 2\frac{x^2}{2} - \sin x + c$

$F(\pi) = \pi^2 - \sin\pi + c = \pi^2$

$c = \sin\pi = 0$

$F(x) = x^2 - \sin x$

208/3

$f(x) = \int_0^x (\sin t - \cos t)\,dt =$

$= [-\cos t - \sin t]_0^x = -\cos x - \sin x + \cos 0 + \sin 0 =$

$= -\cos x - \sin x + 1$

$f'(x) = \sin x - \cos x = 0$

$\sin x = \cos x$

$x_1 = \frac{\pi}{4} \qquad x_2 = \frac{5}{4}\pi$

Beispiel:

$\int_{-4}^{4} |x^2-4|\,dx$

1. Fall: $x^2-4 \geq 0 \;;\; x \geq 2$

2. Fall: $x < 2$

$\int_{-4}^{4} |x^2-4|\,dx = \int_{-4}^{2} -(x^2-4) + \int_{2}^{4} x^2-4 = \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-4}^{2} + \left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{2}^{4} =$

$= -\frac{8}{3}+8-\left(+\frac{64}{3}-16\right)+\frac{64}{3}-16-\left(\frac{8}{3}-8\right) =$

$\int_{-4}^{4} |x^2-4|\,dx$

Fallunterscheidung:

$$|x^2-4| = \begin{cases} \text{für } x^2-4 > 0 & x > 2 \text{ oder } x < -2 \\ \text{für } x^2-4 = 0 & x = \pm 2 \\ \text{für } x^2-4 < 0 & -2 < x < 2 \end{cases}$$

$\int_{-4}^{4} |x^2-4|\,dx = \int_{-4}^{-2} (x^2-4)\,dx + \int_{-2}^{+2} (-x^2+4)\,dx + \int_{+2}^{+4} (x^2-4)\,dx =$

$= \left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-4}^{-2} + \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{+2} + \left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{+2}^{+4} =$

$= 32$

210/16

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x^3 - 2 & \text{für } -4 \le x \le 2 \\ ax - \frac{1}{x^2} & \text{für } 2 < x < 4 \\ -(x-b)^2 & \text{für } 4 \le x \le 6 \end{cases}$$

Stetigkeit $\lim_{h \to 0} f(2-h) = \lim_{h \to 0} f(2+h) = f(2)$

$f(2) = -1$

$-1 = 2a - \frac{1}{4}$; $a = -\frac{3}{8}$

$f(4) = -(16 - 8b + b^2)$

$-b^2 + 8b - 16 = \dots = -\frac{12}{8} - \frac{1}{16}$

$+(4-b)^2 = +\frac{25}{16}$

$4 - b = \pm\frac{5}{4}$

$b = 4 \pm \frac{5}{4}$ $\quad b_1 = \frac{11}{4}$; $b_2 = \frac{21}{4}$

$$\int_{-4}^{6} f(x)\,dx = \int_{-4}^{2}\left(\frac{1}{8}x^3 - 2\right)dx + \int_{2}^{4}\left(-\frac{3}{8}x - \frac{1}{x^2}\right)dx + \int_{4}^{6} -\left(x - \frac{11}{4}\right)^2 dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{8 \cdot 4} - 2x\right]_{-4}^{2} + \left[-\frac{3x^2}{8 \cdot 2} + \frac{1}{x}\right]_{2}^{4} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{11}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{121}{4}x\right]_{4}^{6} =$$

$$= -32{,}7917$$

$$\int_{-4}^{6} f(x)\,dx = \int_{-4}^{2}\left(\frac{1}{8}x^3 - 2\right)dx + \int_{2}^{4}\left(-\frac{3}{8}x - \frac{1}{x^2}\right)dx + \int_{4}^{6} -\left(x - \frac{21}{4}\right)^2 dx =$$

$$= \left[\frac{1 \cdot x^4}{8 \cdot 4} - 2x\right]_{-4}^{2} + \left[-\frac{3 \cdot x^2}{8 \cdot 2} + \frac{1}{x}\right]_{2}^{4} + \left[-\frac{x^3}{3} + \dots\right.$$

15a, b, c

a) $\int_1^2 |x|\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

b) $\int_{-1}^{2} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_0^2 x\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2}$

c) $\int_{-2}^{-1} \sqrt{x^2}\,dx = \int_{-2}^{-1} -x\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2} + 2 = 1\frac{1}{2}$

211/21

$F(x) = \int_0^x (at^2 + bt + c)\,dt$

$f(t) = at^2 + bt + c$

(1) F(x) hat bei x=5 Extremum

(2) F(x) hat bei x=3 NST. (3;0)

(3) $f(1) = \frac{4}{7}$

$f(5) = 25a + 5b + c = 0$ (1)

$\int_0^3 (at^2 + bt + c)\,dt = 0$

$\left[a\frac{t^3}{3} + b\frac{t^2}{2} + ct\right]_0^3 = 9a + \frac{9}{2}b + 3c = 0$ (2)

$f(1) = a + b + c = \frac{4}{7}$ (3)

aus (1): $c = -25a - 5b = -5(5a + b)$

~~in (3): $a + b - 5(5a + b) = \frac{4}{7}$~~

~~$a + b - 25a - 5b = \frac{4}{7}$~~

~~$-24a - 4b = \frac{4}{7}$~~

~~$-6a - b = \frac{1}{7}$~~

~~$b = -6a - \frac{1}{7}$~~

~~$c = -25a - 5(-6a - \frac{1}{7})$~~

in (2) $9a + \frac{9}{2}b + 3(-25a - 5b) = 0$

$9a + \frac{9}{2}b - 75a - 15b = 0$

$-66a - 10{,}5b = 0$

$66a = -10{,}5b$

in (3) $-24a - 4b = \frac{4}{7}$

$-6a - b = \frac{1}{7}$

$b = -\frac{1}{7} - 6a$

$+66a = -10{,}5\left(-\frac{1}{7} - 6a\right)$

$66a = \frac{10{,}5}{7} + 63a$

$3a = \frac{3}{2}$

$a = \frac{1}{2}$

$b = -\frac{1}{7} - \frac{6}{2}$

$b = -\frac{1}{7} - 3 = -\frac{22}{7}$

$c = -25a - 5b$

$c = -\frac{25}{2} + \frac{110}{7} = \frac{-175 + 220}{14} = \frac{45}{14}$

$F(x) = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx$

$F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{11}{7}x^2 + \frac{45}{14}x$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Hausaufgabe 210/15 g, h

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{22}{7}x + \frac{45}{14}$

15g) $\int_{-1}^{+1} (3x^2 - 9|x| + 6)\,dx =$

$= \int_{-1}^{0} (3x^2 + 9x + 6)\,dx + \int_{0}^{1} (3x^2 - 9x + 6)\,dx = \left[3\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-1}^{0} +$

$+ \left[x^3 - 9\frac{x^2}{2} + 6x\right]_{0}^{1} = 1 - \frac{9}{2} + 6 + 1 - \frac{9}{2} + 6 = 5$

15h) $\int_{-2}^{4} |z^3 - 1|\,dz =$

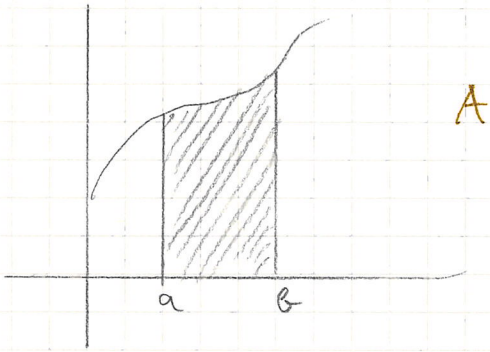
$= \int_{-2}^{1} (-z^3 + 1)\,dz + \int_{1}^{4} (z^3 - 1)\,dz = \left[-\frac{z^4}{4} + z\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{z^4}{4} - z\right]_{1}^{4} =$

$= -\frac{1}{4} + 1 + 4 + 2 + 64 - 4 - \frac{1}{4} + 1 = 67\frac{1}{2}$

Kurze Wiederholung:

1. Überlegung

Flächeninhalt einer ebenen Figur



$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

mit Hilfe von Grenzwertberechnungen

2. Überlegung

$F(x)$ ist eine Stammfkt. zu $f(x)$ wenn $F'(x) = f(x)$

Schreibweise: $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

(unbestimmtes Integral)

3. Überlegung

Integralfkt.

$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

4. Überlegung

Zusammenhang zwischen Stamm- und Integralfkt. (HDI)

$G(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ ist differenzierbar

$G'(x) = f(x)$

$G(x) = F(x) + c$

5. Überlegung

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2.4. Anwendung der Integralrechnung auf die Berechnung von Flächeninhalten

$f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a;b]$ — 1. Fall

$A = \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

Beispiel:

$f(x) = 3x^2$ in $[0;3]$

$A = \int_0^3 3x^2\,dx = \left[3\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 27$

$f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a;b]$ — 2. Fall

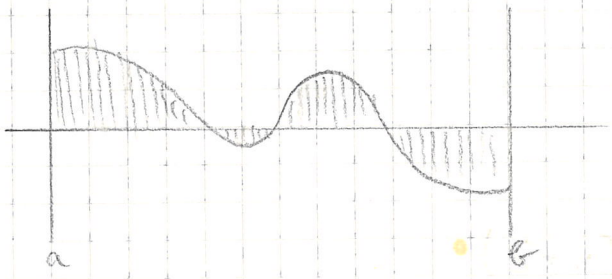
$A = -\int_a^b f(x)\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$

Beispiel:

$f(x) = \cos x$ in $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$

$A = \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x\,dx\right| = \left|\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\right| = \left|\sin\frac{3}{2}\pi - \sin\frac{1}{2}\pi\right| = |-1-1| = 2$

$f(x)$ hat im Intervall eine oder mehrere Nullstellen — 3. Fall



Man zerlegt das Intervall in Teilintervalle und integriert über die Teilintervalle

$A = \left|\int_a^c f(x)\,dx\right| + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$ (NSt. c)

Beispiel:

$f(x) = 2 - \frac{x^2}{2}$ in $[0;3]$

Bestimmung der NSt.

$2 - \frac{x^2}{2} = 0 \;;\; 4 - x^2 = 0 \;|\cdot x^2 = 4 \;;\; x = \pm 2$

$A = \left|\int_0^2 f(x)\,dx\right| + \left|\int_2^3 f(x)\,dx\right| = \left|\left[2x - \frac{x^3}{3\cdot 3}\right]_0^2\right| + \left|\left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_2^3\right| =$

$= 4 - \frac{8}{6} + \left|6 - \frac{27}{6} - 4 + \frac{8}{6}\right| = 4 - \frac{8}{6} - 6 + \frac{27}{6} + 4 - \frac{8}{6} = 3\frac{5}{6}$

$y = ax^2 - x^3$

x-Achse und Kurve

$ax^2 = x^3$

$a = x$ NST.

$0 = x$ NST.

~~$A = \left| \int_a^0 (ax^2 - x^3)\,dx \right|$~~

$A = \left| \pm \int_0^a (ax^2 - x^3)\,dx \right| = \left| \pm \left[a\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^a \right| = \left| \frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} \right| = \left| a^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \right| =$

$= \left| a^4 \frac{1}{12} \right| = \left| \frac{a^4}{12} \right| = \frac{a^4}{12}$

$y = x^3 + 3x^2 + 2x \quad ; \quad x \in -3 / x = +3$

Nstberechnung: $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$

$x(x^2 + 3x + 2) = 0$

$N_1(0|0)$

$x^2 + 3x + 2 = 0$

$x^2 + 3x = -2$

$x(x+3) = -2$

$N_2(-1|0)$

$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

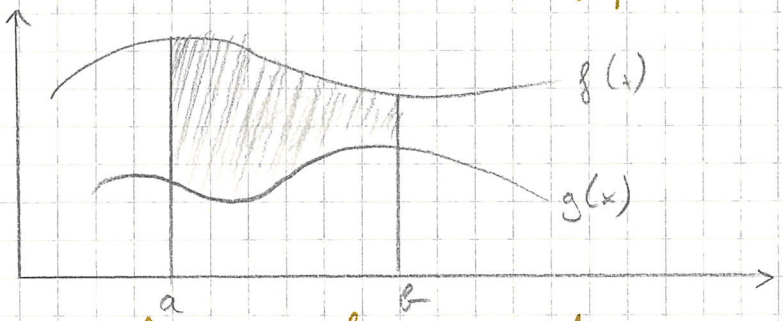
$-(x^2 + x)$

$2x + 2$

$N_3(-2|0)$

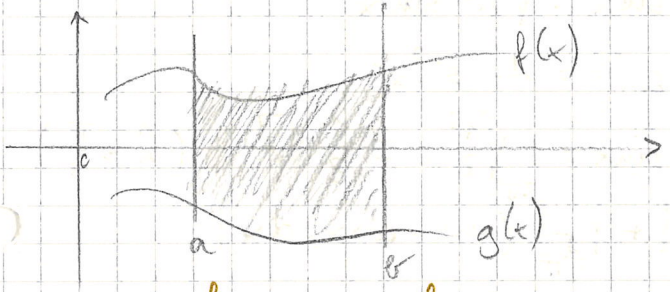
$A = \left| \int_{-3}^{-2} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{-1}^{0} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{0}^{3} f(x)\,dx \right| = 59$

4. Fall Fläche zwischen den Graphen von zwei Fkt.



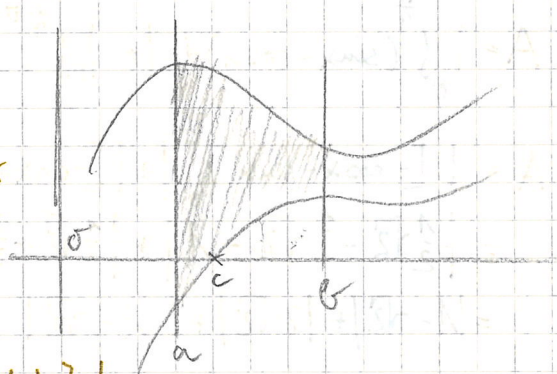
$f(x) \geq g(x) \geq 0$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \right|$$



$f(x) \geq 0 \quad g(x) \leq 0$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Beispiel:

Berechne Inhalt zwischen

Schnittp. zwischen $f(x) = 2 - x^2$; $g(x) = x^2 - 2x - 2$

$2 - x^2 = x^2 - 2x - 2$

$1 = x^2 - x - 1$

$x(x-1) = 2$

$x_1 = 2 \; ; \; x_2 = -1$

$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

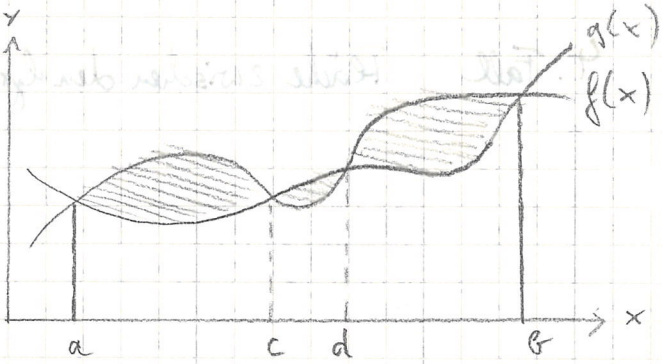
$x^2 - 2x$

$+x - 2$

$$A = \left| \int_{-1}^{2} (2 - x^2 - x^2 + 2x + 2)\,dx \right| = \left| \left[-2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^{2} \right| = \left| -\frac{16}{3} + 4 + 8 - \frac{2}{3} - 1 + 4 \right| =$$

$$= \left| -\frac{16}{3} + \frac{45}{3} - \frac{2}{3} \right| = 9$$

$$A = \left| \int_a^c (f(x)-g(x))\,dx \right| + \left| \int_c^d (f(x)-g(x))\,dx \right| + \left| \int_d^b (g(x)-f(x))\,dx \right|$$



1. Beispiel: $f(x) = \sin x$ $\quad [0; 2\pi)$

$g(x) = \cos x$

Schnittpunkte: $\sin x = \cos x$

$x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{5}{4}\pi$

$\sin x = \cos x$

$\sin x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

$\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad (\hat{x} = \frac{\pi}{4})$

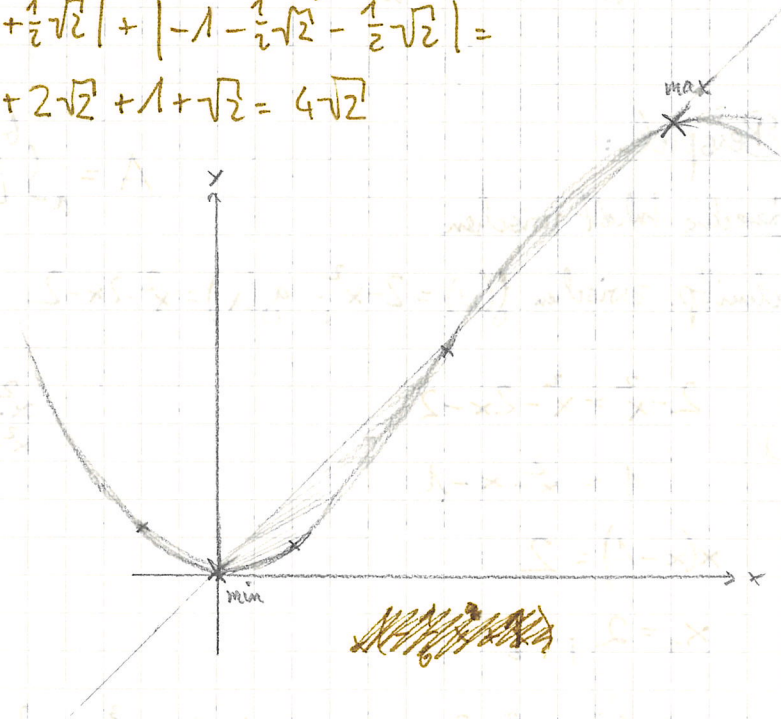
$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\sin x - \cos x)\,dx \right| + \left| \int_{\frac{5}{4}\pi}^{2\pi} (\sin x - \cos x)\,dx \right|$$

$$A = \left| \left[-\cos x - \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right| + \left| \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \right| + \left| \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{5}{4}\pi}^{2\pi} \right| =$$

$$= \left| -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + 1 \right| + \left| \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \right| + \left| -1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \right| =$$

$$= |1-\sqrt{2}| + |2\sqrt{2}| + |-1-\sqrt{2}| = -1+\sqrt{2}+2\sqrt{2}+1+\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

2. Beispiel $y = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^2$



$f'(x) = -\frac{1\cdot 3}{18}x^2 + \frac{1}{2}\cdot 2x = -\frac{1}{6}x^2 + x$

$f'(x) = 0 = -\frac{1}{6}x^2 + x$; $x(-\frac{1}{6}x + 1) = 0$

$x_1 = 0$; $x_2 = 6$

$f''(x) = -\frac{2}{6}x + 1$

$f''(0) > 0$ (Min.) $\quad T(0|0)$

$f''(6) < 0$ (Max.) $\quad H(6|6)$

$$A = \left| \int_0^3 (-\tfrac{1}{18}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 - x)\,dx \right| + \left| \int_3^6 (-\tfrac{1}{18}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 - x)\,dx \right| =$$

$$= \left| \left[-\tfrac{1}{18}\cdot\tfrac{x^4}{4} + \tfrac{1}{2}\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^2}{2} \right]_0^3 \right| + \left| -\tfrac{x^4}{4\cdot 18} + \tfrac{x^3}{6} - \tfrac{x^2}{2} \right|_3^6 =$$

$$= \left| -\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{9}{4} + \tfrac{9}{2} - \tfrac{9}{2} \right| + \left| -18 + 36 - 18 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{9}{4} + \tfrac{9}{2} - \tfrac{9}{2} \right| =$$

$$= \frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{18}{8}$$

Aufgabe

geg.: $f(x) = x^2$; $g(x) = 1 - \lambda x^2$

ges.: Fläche zwischen Schnittpunkten ; λ so, daß $A = \frac{2}{3}$

$x^2 = 1 - \lambda x^2$

$x^2 + \lambda x^2 - 1 = 0$

$x^2(1+\lambda) - 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{1+\lambda}$ $\quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}$

$$A = \left| \int_{-\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}}^{+\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}} (x^2 - 1 + \lambda x^2)\,dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x + \lambda \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}}^{+\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}} \right| = \left| \left[x\left(\frac{x^2}{3} - 1 + \frac{\lambda x^2}{3} \right) \right]_{\dots}^{\dots} \right| =$$

$$= \left| \left[(1+\lambda)\frac{x^3}{3} - x \right]_{-\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}}^{\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}} \right| = \left| \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}\right)\left(\frac{1+\lambda}{3}\right) - \sqrt{\frac{1}{1+\lambda}} - \left(-\frac{\frac{1}{1+\lambda}\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}\,(1+\lambda)}{3} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{\frac{1}{1+\lambda}} \right) \right| = \left| \frac{\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}}{3} - \sqrt{\frac{1}{1+\lambda}} - \sqrt{\frac{1}{1+\lambda}} + \frac{\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}}{3} \right| = \left| \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}\right) - 2\left(\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}\right) \right| =$$

$$= \left| \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}\right) - \frac{2}{1}\left(\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}\right) \right| = \left| \left(\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) \right| = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}$$

$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}} = \frac{2}{3}$ $\qquad 1+\lambda = 4$

$2\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}} = 1$ $\qquad \lambda = 3$

$4\left(\frac{1}{1+\lambda}\right) = 1$

$\frac{1}{1+\lambda} = \frac{1}{4}$

187/g

$f(x) = 2x^2 - 3x - 2$

x	-1	0	1	2
y	3	-2	-3	0

$$A = \left| \int_0^2 (2x^2 - 3x - 2)\,dx \right| + \left| \int_2^3 (2x^2 - 3x - 2)\,dx \right| =$$

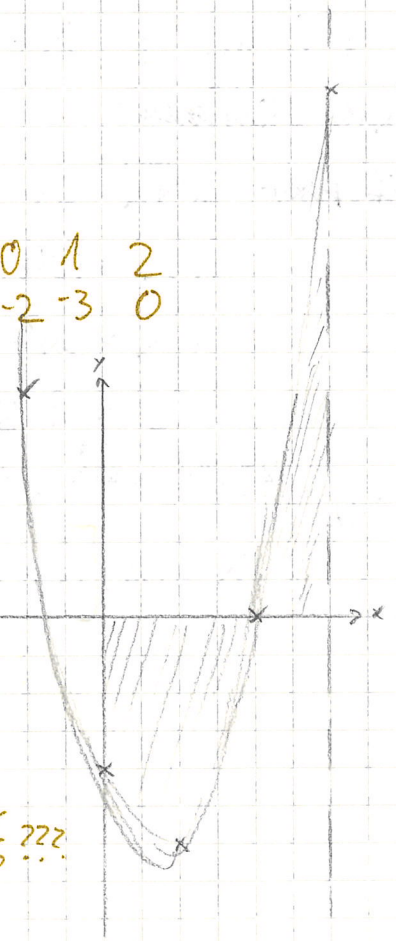
$$= \left| \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 2x \right]_0^2 \right| + \left| \left[\dots \right]_2^3 \right| =$$

$$= \left| \frac{2\cdot 8}{3} - 6 - 4 \right| + \left| 18 - \frac{27}{2} - 6 - \frac{2\cdot 8}{3} + 6 + 4 \right| =$$

$$= \frac{14}{3} + \left| 22 - \frac{3\cdot 27}{6} - \frac{4\cdot 8}{6} \right| = \frac{14}{3} + \left| \frac{22\cdot 6 - 3\cdot 27 - 4\cdot 8}{6} \right| =$$

$$= \frac{14}{3} + \left| \frac{132 - 81 - 32}{6} \right| = \frac{14}{3} + \frac{19}{6} = \frac{28+19}{6} = \frac{37}{6}$$

$7\frac{5}{6}$???



187/6 a b

a) $\int_0^\lambda x^2 dx = 72$

$\int_0^\lambda x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\lambda = \frac{\lambda^3}{3} = 72 \; ; \; \lambda^3 = 72 \cdot 3 \; ; \; \lambda = 6$

b) ~~$\int_0^{\sqrt{\lambda}} (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^{\sqrt{\lambda}} = \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\lambda} = 12$~~

~~$\frac{\lambda + 2\sqrt{\lambda}}{2} = 12 \; ; \; \lambda + 2\sqrt{\lambda} = 24$~~

~~$(\lambda + 2\sqrt{\lambda})^2 = 24^2 \quad -\lambda + 24 = 2\sqrt{\lambda}$~~

~~$\lambda^2 + 4\lambda = (24 - \lambda)^2$~~

~~$4\lambda = 24^2 - 48\lambda + \lambda^2$~~

~~$0 = \lambda^2 - 52\lambda + 24^2$~~

~~$\lambda_{1/2} = \frac{52 \pm \sqrt{52^2 - 4 \cdot 24^2}}{2} = \frac{52 \pm 20}{2} = 26 \pm 10$~~

~~b) $\int_0^{\sqrt{\lambda}} (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^{\sqrt{\lambda}}$~~

~~$\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\lambda} = 12$~~

~~$2\sqrt{\lambda} + \lambda = 12$~~

b) $\int_0^{\sqrt{\lambda}} (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^{\sqrt{\lambda}} = \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\lambda}$

$\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\lambda} = 12 \; ; \; \lambda + 2\sqrt{\lambda} = 24$

~~λ^2~~

$2\sqrt{\lambda} = 24 - \lambda$

$4\lambda = (24 - \lambda)^2$

$4\lambda = 24^2 - 48\lambda + \lambda^2$

$0 = \lambda^2 - 52\lambda + 24^2$

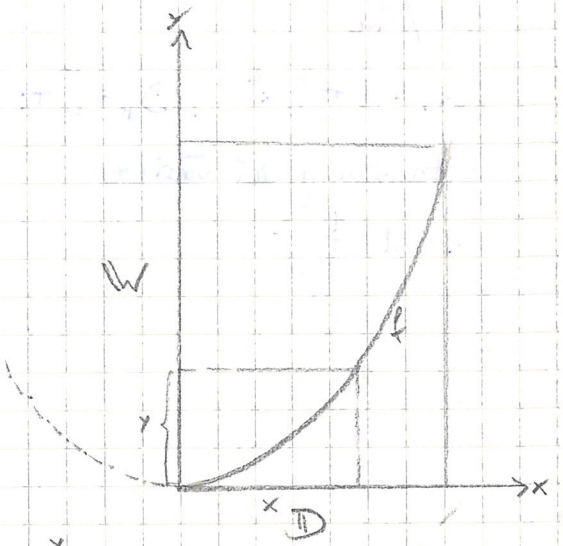
$\lambda_{1/2} = \frac{52 \pm \sqrt{52^2 - 4 \cdot 24^2}}{2} = \frac{52 \pm 26}{2} = 26 \pm 10$!

$\lambda_1 = 16 \; ; \; [\lambda_2 = 36]$

3. Die Ableitung der Umkehrfkt.

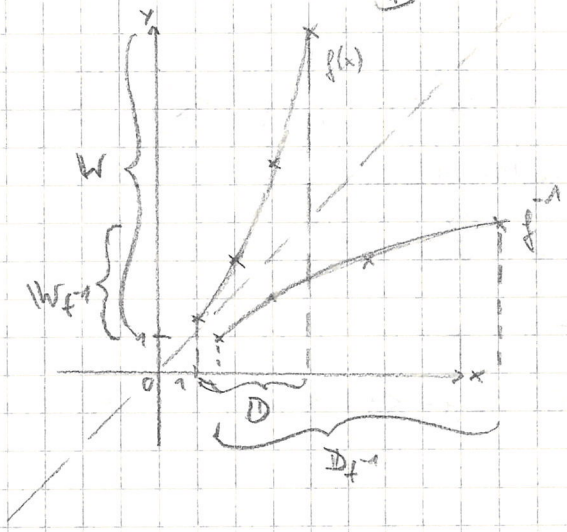
3.1. Wiederholung der Umkehrfkt.

Def.: Eine Fkt. $f: x \mapsto y = f(x)$ heißt umkehrbar, wenn es zu jedem $y \in W$ genau ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ gibt (Umkehrfkt. f^{-1})



Beispiel: $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ in $D_f = [1;4]$

$W_f = [1\frac{1}{2}; 9]$



Vertauschen der Variablen

$x = \frac{1}{2}y^2 + 1$

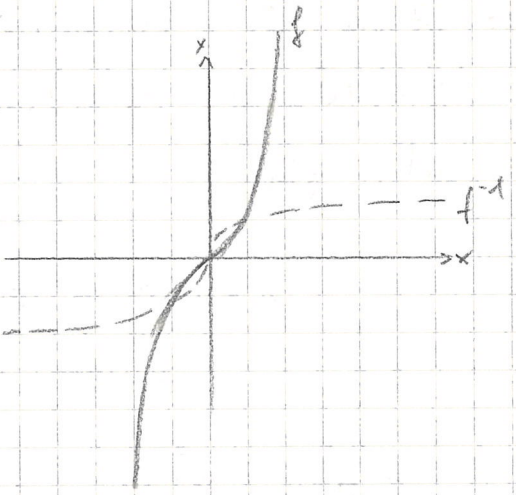
$y^2 = 2x - 2$

$y = (\pm)\sqrt{2x-2}$

$D_{f^{-1}} = [1\frac{1}{2}; 9]$

$W_{f^{-1}} = [1;4]$

Beispiel: $y = x^3 \quad x \in \mathbb{R} \,/\, D \in \mathbb{R}$



Vertauschen der Variablen

$x = y^3$

$y = \sqrt[3]{x}$ für $x \geq 0$

$y = -\sqrt[3]{-x}$ für $x \leq 0$

HA: $y = -x^3$ Vertauschung der Variablen: $x = -y^3$

$y = -\sqrt[3]{x}$ für $x \geq 0$

$y = \sqrt[3]{-x}$ für $x \leq 0$

226/1a

$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$; $D_f = [-4; 0]$

Vertauschung der Variablen:

$x = 1 + \frac{1}{2}y^2$

$\frac{1}{2}y^2 = x - 1$

$y^2 = 2x - 2$

$y = -\sqrt{2x-2}$ $\quad W_f = [-4; 0]$ $\quad D_f = [1; 9]$

c) $y = \frac{2x}{x-1}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Vertauschung:

$x = \frac{2y}{y-1}$

$xy - x = 2y$

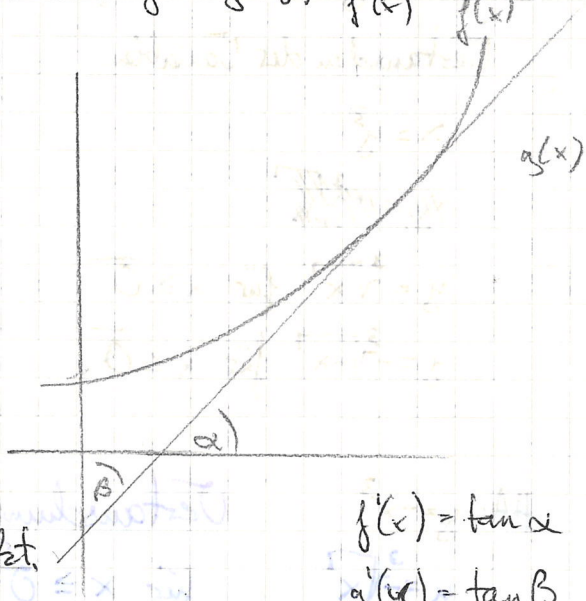
$0 = 2y - xy + x$; $0 = x - xy + 2y$

□
0

3.2. Die Ableitung der Umkehrfkt.

Satz: Ist die Fkt. $y = f(x)$ in $[a; b]$ differenzierbar und echt monoton und ist $f'(x) \neq 0$, so ist $x = g(y)$ ebenfalls differenzierbar und es gilt $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ mit $x = g(y)$.

Beweis:



$$f'(x) = \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\tan(90° - \alpha)} =$$

$$= \frac{1}{\tan\beta} = g'(y)$$

$f'(x) = \tan\alpha$

$g'(y) = \tan\beta$

Ersetzt man in $g'(y)$ die Variable y durch die Variable x, so erhält man die Ableitung der Umkehrfkt.

Bsp.: $y = -3x + 5$ (streng monoton und differenzierbar)

$f'(x) = -3$

Auflösen nach x:

$y - 5 = -3x$

$g(y) \quad x = \frac{1}{3}(5-y)$

$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-3}$ (mit $x = g(y)$)

Vertauschung der Variablen (Umkehrfkt.)

$g(x) = y = \frac{1}{3}(5-x)$

$g'(x) = -\frac{1}{3}$

Bsp.: $y = f(x) = x^2 \quad ; x \geq 0$

$f'(x) = 2x$

Auflösen nach x

$g(y) = x = \sqrt{y}$

$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

Vertauschen: (Umkehrfkt.)

$g(x) = y = \sqrt{x}$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Probe: $g(y) = y^{\frac{1}{2}}$

$g'(y) = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

Bsp. 229/1c

$f(x) = y = \frac{1-x}{x} \quad ; D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Auflösung nach x

$xy = 1 - x$

$xy + x = 1$

$x(y+1) = 1$

$x = \frac{1}{y+1}$

~~$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y}$~~ $g(y) = x = \frac{1}{y+1}$

$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = -x^2 = -\left(\frac{1}{y+1}\right)^2$

Vertauschen:

$g(x) = \frac{1}{x+1}$

$g'(x) = -\left(\frac{1}{x+1}\right)^2$

~~Probe $g(x) = \frac{1}{x+1}$~~ HA: 229/1a, b

$\frac{f \cdot g' - f' g}{g^2}$

229 | 1a, b

a) $y = 3x + 5$; $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3$

Auflösen nach x:

$3x = y - 5$

$x = \frac{1}{3}y - \frac{5}{3} = g(y)$

$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3}$

Vertauschen der Variablen:

$g'(x) = \frac{1}{3}$

$g(x) = \frac{1}{3}y - \frac{5}{3}$

b) $y = \frac{1}{2}x - 3$; $D_f = [2;6]$

$f'(x) = \frac{1}{2}$

Auflösen nach x

$\frac{1}{2}x = y + 3$

$x = 2y + 6 = g(y)$

$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Vertauschen der Variablen

$g(x) = 2x + 6$

$g'(x) = 2$

229 | Nr. 4

[redacted]

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 1$

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 5$

Überprüfung auf NSt.:

$3x^2 + 6x + 5 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 60}}{6}$ $\Rightarrow$ keine NSt. $\Rightarrow$ monoton

Die Fkt. ist monoton ⇒ sie ist umkehrbar

Steilste oder flachste Stelle von f^{-1} ist eine flachste oder steilste Stelle von f.

Wir suchen minimalen Wert / maximalen Wert der Steigung $f'(x) = 3x^2 + 6x + 5$

$f''(x) = 6x + 6$

Nst.: $6x + 6 = 0$; $6x = -6$; $x = -1$

$f'''(x) = 6 \quad > 0 \Rightarrow$ max.

Bei $P(-1;-4)$ ist $f(x)$ am flachsten,

Bei $P(-4;-1)$ ist $f'(x)$ am steilsten

229|2

$y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5$; $x \in \mathbb{R}^+$

$P(2|3)$

$P'(3|2)$

$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 10x$

Auflösen nach x: $x = g(y)$

$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$ Vertauschen!

$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

$g'(3) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{4}$

Monotonie / Umkehrbarkeit:

$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 10x \qquad x \in \mathbb{R}^+$

$x^3 - 6x^2 + 10x = 0$

$x(x^2 - 6x + 10) = 0$

$x^2 - 6x + 10 = 0$

$x_{1|2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2}$ ⇒ keine Nst.

Berechne mit Hilfe der Umkehrfkt. die Ableitung von $g(x) = \sqrt{x-1}$; $x \geq 1$

Umkehrfkt.

$y = \sqrt{x-1}$

$y^2 = x - 1$

$x = y^2 + 1 = f(y)$

$f'(y) = 2y$

$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$x = \sqrt{y-1}$

$x^2 = y - 1$

$y = x^2 + 1 = f(x)$

$f'(x) = 2x$

$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

$g'(y) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y-1}}$

HA: $g(x) = \sqrt[4]{x}$

$y = \sqrt[4]{x}$

$y^4 = x$ Auflösen nach x

$f(y) = y^4$

$f'(y) = 4y^3$

$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{4y^3} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x}^3} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}$

Ha: $g(x) = \sqrt[4]{x}$

Vertauschen: $x = \sqrt[4]{y}$

$f(x) = y = x^4$

$f'(x) = 4x^3$

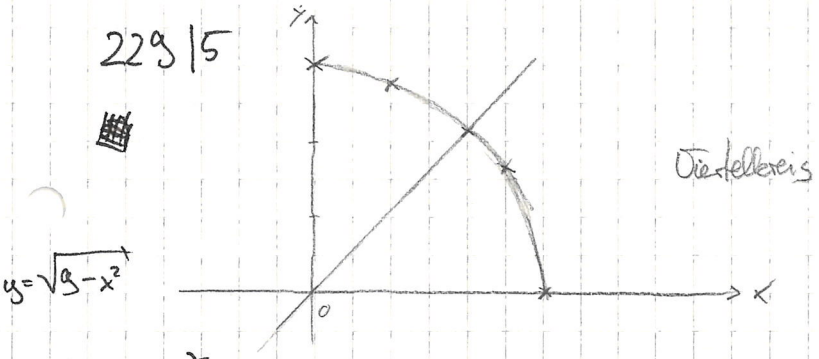
$g(y) = \sqrt[4]{y}$

$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{4x^3} = \frac{1}{4(\sqrt[4]{y})^3}$

Vertauschen:

$g'(x) = \frac{1}{4(\sqrt[4]{x})^3} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}$

229 | 5



$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$ $\quad x \in]-3;3[$

$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(g(x))}$

$\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\frac{\sqrt{9-y^2}}{-y}} \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{9-y^2}}{-y}$

$-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\sqrt{9-(9-x^2)}}{-\sqrt{9-x^2}} = \frac{x}{-\sqrt{9-x^2}}$

Bilde die Ableitung mit Hilfe der Umkehrfkt. !

$y = x^{\frac{1}{n}} = g(x)$ $\quad$ (Formel: $y' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$)

§ Berechnung der Umkehrfkt.

$x = y^{\frac{1}{n}}$

$x^n = y \; ; \; f(x) = g^{-1}(x) = x^n$

$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ $\quad g'(y) = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n \; y^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}$

Vertauschen der Variablen:

$g'(x) = \frac{1}{n} \; x^{\frac{1}{n}-1}$

36/

$f(x) = \frac{x^2}{4(a-8)} + a$

$\frac{x^2}{4(a-8)} + a = 0$

$\frac{x^2}{4(a-8)} = -a$

$x^2 = -4a(a-8)$

$x^2 = 4a(8-a)$

$x = \pm 2\sqrt{8a-a^2}$ NST.

Flächenberechnung:

$$A = \int_{-2\sqrt{a(8-a)}}^{+2\sqrt{a(8-a)}} \left[\frac{x^2}{4(a-8)} + a\right] dx = \left[\frac{x^3}{4(a-8)3} + ax\right]_{-2\sqrt{a(8-a)}}^{+2\sqrt{a(8-a)}} =$$

$$= \frac{8a(8-a)\sqrt{a(8-a)}}{12(a-8)} + 2a\sqrt{a(8-a)} + \frac{8a(8-a)\sqrt{a(8-a)}}{12(a-8)} + a2\sqrt{a(8-a)} =$$

$$= \left[\frac{-2a\sqrt{a(8-a)}}{3} + 2a\sqrt{a(8-a)}\right] \cdot 2 =$$

$$= -\frac{4}{3}a\sqrt{a(8-a)} + 4a\sqrt{a(8-a)} =$$

$$= \frac{8}{3}a\sqrt{a(8-a)}$$

Maximumfläche

$A = \frac{8}{3}a\sqrt{a(8-a)}$

Monotoniegesetz

$A^2 = \frac{64}{9}a^2(a(8-a)) = \frac{64}{9}a^3(8-a) = \frac{64}{9}(8a^3 - a^4)$

$(A^2)' = \frac{64}{9}(24a^2 - 4a^3)$

$0 = 24a^2 - 4a^3$

$4a^2(6-a) = 0 \qquad (a_1 = 0)\ ;\ a_2 = 6$

$(A^2)'' = \frac{64}{9}(48a - 12a^2)$

$(A^2)''(6) = \frac{64}{9}(6 \cdot 48 - 12 \cdot 36)$ $< 0 \Rightarrow$ Maximum bei $a = 6$

29 / $f(x) = x^2$; $g(x) = 1 - \lambda x^2$; $\lambda > 0$

$x^2 = 1 - \lambda x^2$

$x^2 + \lambda x^2 = 1$

$x^2 + \lambda x^2 - 1 = 0$

$x^2(1 + \lambda) - 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{1+\lambda}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}$

$$A = -\int_{-\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}}^{+\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}} x^2\,dx + \int_{-\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}}^{+\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}} (1 - \lambda x^2)\,dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}}^{+\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}} (1 - \lambda x^2 - x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}(\lambda + 1)\right]\ldots =$$

$= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}$

gleich $\frac{2}{3}$ setzen:

$\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{\sqrt{1+\lambda}} = 1$

$2 = \sqrt{1+\lambda}$

$4 = 1 + \lambda$

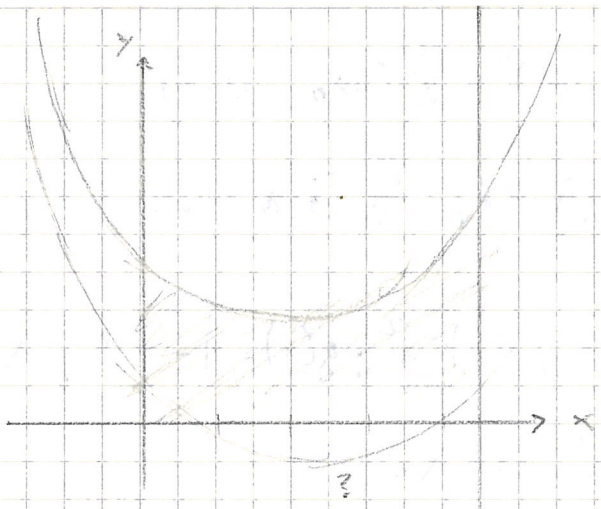
$\lambda = 3$

Ha: 32

32|

$f'(x) = 2\left(\frac{x}{3} - 1\right) = \frac{2}{3}x - 2$

$f(x) = \frac{2}{3}\frac{x^2}{2} - 2x + c = \frac{x^2}{3} - 2x + c$



~~NST.: $\frac{x^2}{3} - 2x + c = 0$~~

~~$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4c\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}}$~~

~~$A = \int_0^9 \left(\frac{x^2}{3} - 2x + c\right)dx = \left[2\left(\frac{x}{3} - 1\right)\right]_0^9 = 4 + 2 - 6$~~

$x = 9$

$A = \int_0^9 \left(\frac{x^2}{3} - 2x + c\right)dx = \left[\frac{x^3}{9} - x^2 + cx\right]_0^9 = 81 - 81 + 9c = 9c$

$9c = 36 \; ; \; c = 4$

$f(x) = \frac{x^2}{3} - 2x + 4$

$a - \frac{x^2}{a} = a^2 - ax^2 \quad | : a$

$1 - x^2 = a^2 - x^2$

32|

$y = mx + t$

$f(x) = 2\left(\frac{x}{3} - 1\right)x + t = \frac{2}{3}x^2 - 2x + t$

$A = \int_0^9 \left(\frac{2}{3}x^2 - 2x + t\right)dx = \left[\frac{2}{3}\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + tx\right]_0^9 = 2 \cdot 81 - 81 + 9t = 81 + 9t$

$81 + 9t = 36$

$t = -5$

$f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 2x - 5$

15)

Berechnung der Schnittpunkte

$$a - \frac{x^2}{a} = a^3 - ax^2 \quad | \cdot a$$

$$a^2 - x^2 = a^4 - a^2x^2$$

$$a^2x^2 - x^2 = a^4 - a^2$$

$$x^2(a^2-1) = a^2(a^2-1)$$

$$x = \pm a$$

$$A = \left| \int_{-a}^{+a} \left(a - \frac{x^2}{a} - a^3 + ax^2\right) dx \right| = \left| \left[ax - \frac{x^3}{3 \cdot a} - xa^3 + a\frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{a} \right| =$$

$$= \left| a^2 - \frac{a^3}{3 \cdot a} - a^4 + \frac{a^4}{3} - \left(-a^2 - \frac{+a^3}{+3a} + a^4 + a\frac{-a^3}{3}\right) \right| =$$

$$= \left| \cancel{a^2} + a^2 \cancel{- a^4} \cancel{- a^4} \right| = \left| +2a^2 - 2a^4 + 2 \cdot \frac{a^4}{3} \ldots\ldots \right|$$

$$= \left| \frac{4}{3}a^2 - \frac{4}{3}a^4 \right| = \frac{4}{3}(a^2 - a^4) \quad > 0 \text{ wegen } 0 < a < 1$$

$$A' = \frac{2 \cdot 4\, a}{3} - \frac{4 \cdot 4\, a^3}{3} = \frac{8}{3}a - \frac{16}{3}a^3 = 0$$

$$\frac{8}{3}a(1 - 2a^2) = 0 \qquad (a_1 = 0,\ a_{2/3} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2})$$

$$A'(a) = \frac{4}{3}(2a - 4a^3)$$

$$A''(a) = \frac{4}{3}(2 - 12a^2)$$

$$A''\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{4}{3}(2-6) \quad < 0 \quad \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$A\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{4}{3}(a^2 - a^4) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{4 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3}$$

37) $y = \frac{1+x^2}{x^2}$; $y = 2x$; $x = 2$

Schnittpunkt

$\frac{1+x^2}{x^2} = 2x$

$1+x^2 = 2x^3$

Lösung durch Probieren:

$x = 1$

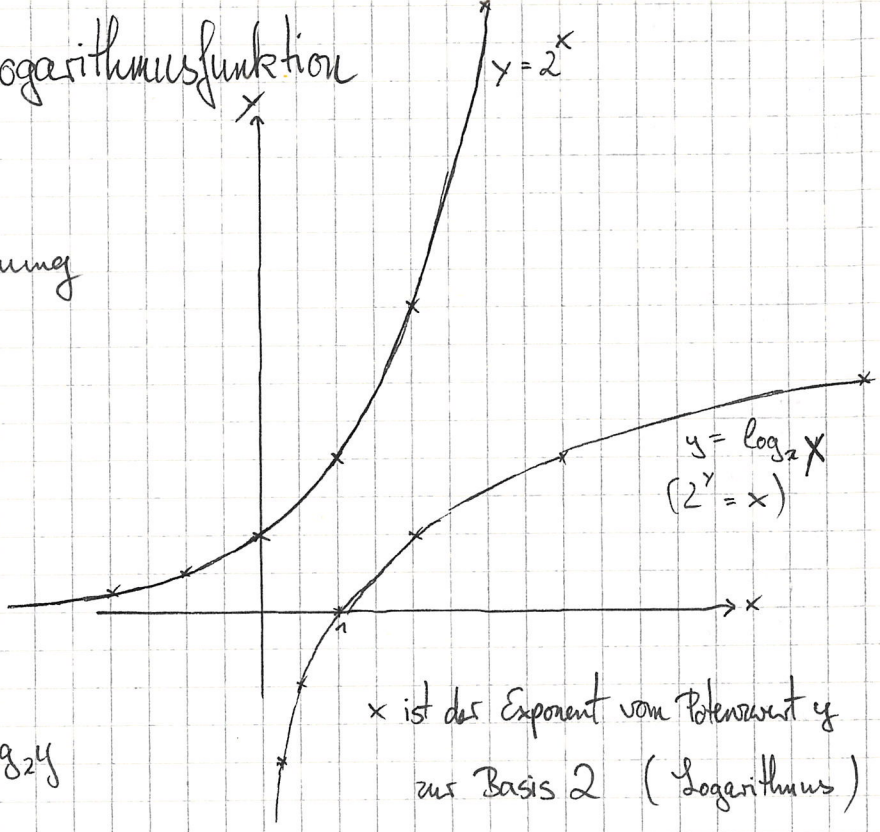
$A = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^2 \left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) dx = \left[x^2\right]_0^1 + \left[\frac{x^{-1}}{-1} + x\right]_1^2 =$

$-\frac{1}{x}$

$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 - (-1+1) = 2{,}5$

$y = 2^x$ (Exponentialfkt.)

Logarithmusfunktion



Def.: Die Lösung der Exponentialgleichung

$r = a^x$ heißt

$x = \log_a r$

$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$r \in \mathbb{R}^+$

$x \in \mathbb{R}$

$x = \log_2 y$

x ist der Exponent vom Potenzwert y zur Basis 2 (Logarithmus)

Sonderfälle:

$r = \log_a a = 1$ wegen $a = a^r$

$r = \log_a a^x = x$ wegen $a^x = a^r$

$r = \log_a 1 = 0$ wegen $1 = a^r$

$\log_2 8 = r = \log_2 2^3 = 3$

oder

$r = \log_2 8$

$2^r = 8 \; ; \; 2^r = 2^3 \; ; \; r = 3$

$\log_2 1024 = \log_2 2^{10} = 10$

$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

$\log_6 \sqrt{6} = \log_6 6^{\frac{1}{2}} = 6$

$\log_5 \frac{1}{125} = \log_5 5^{-3} = -3$

$\log_5 \sqrt[3]{5^{-1}} = \log_5 5^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

$\log_2 4\sqrt{2} = \log_2 \sqrt{32} = \log_2 \sqrt{2^5} = \log_2 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$

$\tau = \log_{a^2} a^{\frac{1}{2}}$

$(a^2)^{\tau} = a \quad ; \tau = \frac{1}{2}$

$\log_2 x = 1 \quad ; x = 2$

$\log_x 0{,}25 = 2$

$x^2 = 0{,}25 \quad ; x = 0{,}5$

$\log_x 8 = -3$

$x^{-3} = 8$

$x^3 = \frac{1}{8} \quad ; x = \frac{1}{2}$

$\log_a x > 0$ für $x > 1$

$\log_a x < 0$ für $0 < x < 1$

$\log_a x = 0$ für $x = 1$

Gesetze zum log. Rechnen

Setze $u = \log_a x \quad ; x = a^u$

$v = \log_a y \quad ; y = a^v$

$x \cdot y = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$

$u + v = \log_a (x \cdot y)$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$$

$x : y = a^u : a^v = a^{u-v}$

$u - v = \log_a \frac{x}{y}$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$$

Setze $x = 1$

$$-\log_a y = \log_a \frac{1}{y}$$

$\log_a x + \log_a x = \log_a(x \cdot x)$

$\log_a x^2 = 2 \log_a x$

$\log_a x^q = q \log_a x$

Logarithmus- und Exponentialfkt.

Fkt.	Stammfkt.
x^q	$\frac{x^{q+1}}{q+1}$; $q \neq -1$

$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad x \in \mathbb{R}^+$ Stammfkt. mit herkömmlichen Methoden nicht auszurechnen

Eigenschaften der Fkt. $L(x)$

① $L(1) = 0$ wegen $\int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$

② $L(x) > 0$ für $x > 1$

$L(x) < 0$ für $0 < x < 1$

③ $L'(x) = \frac{1}{x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$

$L(x)$ steigt monoton

④ $L(x)$ ist differenzierbar und damit stetig

⑤ $L(ax) = \int_1^{ax} \frac{1}{t} dt$

$L'(ax) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$

also $L'(ax) = L'(x)$

Integration: $L(ax) = L(x) + c$

Berechnung des c: Wähle $x = 1$

$L(a) = c$

$L(ax) = L(x) + L(a)$

Setze $x = b$

$$L(a \cdot b) = L(a) + L(b)$$

⑥ Setze $b = \frac{1}{a}$

$$L\left(\frac{a \cdot 1}{a}\right) = L(a) + L\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$0 = L(a) + L\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$L(a) = -L\left(\frac{1}{a}\right)$$

⑦ $L\left(\frac{a}{b}\right) = L\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = L(a) + L\left(\frac{1}{b}\right) = L(a) - L(b)$

⑧ $L(a) + L(a) = L(a \cdot a)$

$$2 \cdot L(a) = L(a^2)$$

$$r \cdot L(a) = L(a^r)$$

⑨ $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

$W = \{y \mid -\infty < y < +\infty\}$ (unbeschränkt)

Vergleich von $L(x)$ und $\log_c x$

	$L(x)$	$\log_c x$
1.	$L(1) = 0$	$\log_c 1 = 0$
2.	$L(x) > 0$ für $x > 1$	$\log_c x > 0$ für $x > 1$
	$L(x) < 0$ für $0 < x < 1$	$\log_c x < 0$ für $0 < x < 1$
3.	$L(x)$ streng monoton steigend	$\log_c x$ streng monoton steigend
4.	diff.bar	diff.bar (Anschauung)
5.	$L(a \cdot b) = L(a) + L(b)$	$\log_c(a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$
6.	$L(a) = -L\left(\frac{1}{a}\right)$	$\log_c a = -\log_c \frac{1}{a}$
7.	$L\left(\frac{a}{b}\right) = L(a) - L(b)$	$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$

8. $r \cdot L(a) = L(a^r)$ $\quad r \log_e a = \log_e a^r$

9. $D = \mathbb{R}^+$ $\quad D = \mathbb{R}^+$

$W = \mathbb{R}$ $\quad W = \mathbb{R}$

4.2. Identifizierung von $L(x)$

$b^y = x \quad ; \quad y = \log_b x$

oder $b^{\log_b x} = x$

$L(x) = L(b^{\log_b x}) = \log_b x \cdot L(b)$

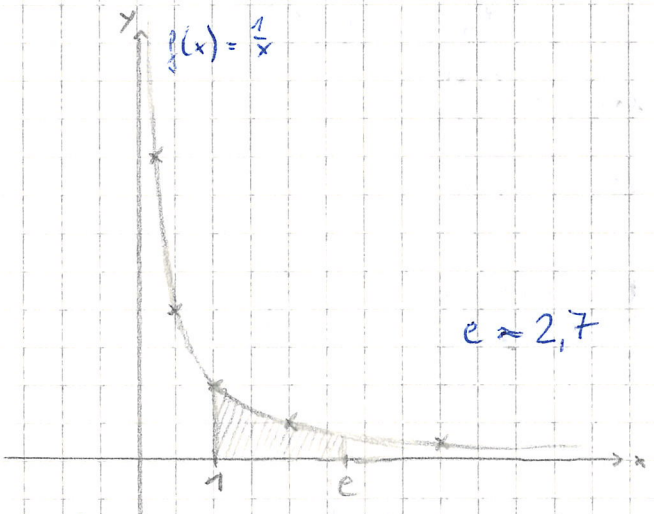
$L(x) = \log_b x \cdot L(b)$

also $L(x) \approx \log_b x$ [$L(b)$ ist Proportionalitätsfaktor]

Wähle: $L(b) = 1$

Besondere Basis heißt e

Damit gilt: $L(x) = \log_e x$



Die Fkt. L ist identisch mit der Logarithmusfkt. zur Basis e, wobei e durch die Bedingung $L(e) = 1$ festgelegt ist ($\int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$)

Die Logarithmen zur Basis e heißen natürliche Logarithmen.

Schreibweise:

$\log_e x = L(x) = \ln x$

Zusammenfassung:

$$L(a) = \ln a = \int_1^a \frac{1}{t}\,dt$$

$\ln e = 1$

$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$

$\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

$\ln a^q = q \ln a$

4.3 Grundformeln der Differentiation und Integration

$$f(x) = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$L(x) = \log_e x \cdot L(b)$$
$$\log_b x = \frac{L(x)}{L(b)}$$
$$\log_e x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

$$f(x) = \log_b x$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln b}$$

Neues Grundintegral:

$$\int_a^b \frac{1}{t}\,dt \qquad a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$\int_a^b \frac{1}{t}\,dt = \int_a^1 \frac{1}{t}\,dt + \int_1^b \frac{1}{t}\,dt = \int_1^b \frac{1}{t}\,dt - \int_1^a \frac{1}{t}\,dt = \ln b - \ln a$$

$$\int_a^b \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_a^b \qquad [a;b] \in \mathbb{R}^+$$

Nächster Fall: $x < 0$? $t < 0$?

$f(x) = \ln(-x)$

$f'(x) = +\frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$ also ist $\ln(-x)$ eine Stammfkt. von $\frac{1}{x}$ für $x < 0$

ebenso ist $\ln x$ eine Stammfkt. von $\frac{1}{x}$ für $x > 0$

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = [\ln(-x)]_a^b \quad \text{für } x < 0$$

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_a^b \quad \text{für } x > 0$$

Zusammenfassung: $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_a^b$ für $x \neq 0$

(a, b gleiches Vorzeichen)

Ha:

$f(x) = \ln(\sin^2 x) = 2\ln\sin x$

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$

a) $\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_1^5 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5 - 0 = \ln 5$

b) $\int_{-1}^{-3} \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_{-1}^{-3} = \ln|-3| = \ln 3$

4.4 Das logarithmische Differenzieren

$y = f(x) \quad (y > 0)$

$\ln y = \ln f(x)$

$\frac{1}{y} \cdot y' = [\ln f(x)]'$

$y' = y[\ln f(x)]'$

$$y' = f(x)[\ln f(x)]'$$

Bsp.: $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}}$

$$\ln f(x) = \ln\sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}} = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{2}(\ln(x-1) - \ln(x-2) - \ln(x-3))$$

$$[\ln f(x)]' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3}\right]$$

$$y' = \sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3}\right)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln f(x)]'$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

Bsp.:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,dx = \ln|x^2+3x+2| + c$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x^2+1| + c$$

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + c$$

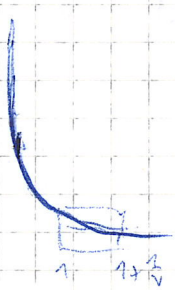
$$\int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{1}{3}\left[\ln|x^3-1| + c\right]$$

$$\int \frac{1}{5x+2}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{5}{5x+2}\,dx = \frac{1}{5}\ln|5x+2|$$

$$\int \frac{3x-1}{3x^2-2x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{6x-2}{3x^2-2x+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln|3x^2-2x+4|$$

Zusammenfassung

1. $f(x) = \ln x \;;\; f'(x) = \frac{1}{x} \qquad x \in \mathbb{R}^+$
2. $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_a^b = \ln b - \ln a$
3. $y' = f(x)\,[\ln f(x)]'$
4. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$



4.5 Die Basis e als Grenzwert einer Zahlenfolge

$$L\left(1+\frac{1}{v}\right) = \int_1^{1+\frac{1}{v}} \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{v}} < L\left(1+\frac{1}{v}\right) < \frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{v+1} < L\left(1+\frac{1}{v}\right) < \frac{1}{v}$$

1. $1 < L\left(1+\frac{1}{v}\right)^{v+1}$
2. $L\left(1+\frac{1}{v}\right)^{v} < 1$

Zusammenfassung:

$$L\left(1+\frac{1}{v}\right)^{v} < 1 < L\left(1+\frac{1}{v}\right)^{v+1}$$

$$L\left(1+\frac{1}{v}\right)^v < L(e) < L\left(1+\frac{1}{v}\right)^{v+1}$$

Da $L(x)$ monoton wachsend ist, gilt:

$$\left(1+\frac{1}{v}\right)^v < e < \left(1+\frac{1}{v}\right)^{v+1}$$

zu zeigen:

$$\lim_{v\to\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^v = \lim_{v\to\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^{v+1}$$

$$\lim_{v\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{v}\right)^{v+1} - \left(1+\frac{1}{v}\right)^v\right] = 0$$

$$\left(1+\frac{1}{v}\right)^{v+1} - \left(1+\frac{1}{v}\right)^v = \left(1+\frac{1}{v}\right)^v\cdot\left(1+\frac{1}{v}\right) - \left(1+\frac{1}{v}\right)^v =$$

$$= \left(1+\frac{1}{v}\right)^v\left(1+\frac{1}{v}-1\right) = \left(1+\frac{1}{v}\right)^v\frac{1}{v}$$

$$\lim_{v\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{v}\right)^v}_{\text{beschränkt}}\underbrace{\frac{1}{v}}_{\text{Nullfolge}} = 0$$

also $\boxed{e = \lim_{v\to\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^v}$ e heißt Eulersche Zahl $e = 2{,}718$

Beh: $\lim_{r\to\infty}\left(1+\frac{k}{r}\right)^r = e^k$ (k konstant)

Substitution $\frac{k}{r} = \frac{1}{v}$; $r = k\cdot v$

$$\lim_{v\to\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^{k\cdot v} = \lim_{v\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{v}\right)^v\right]^k = \left[\lim_{v\to\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^v\right]^k = e^k$$

4.6. Die natürliche Exponentialfkt.

$L(x) = \ln x$ ist diff.bar, monoton wachsend ($\Rightarrow$ hat Umkehrfkt.)

$y = \log_e x$; $e^y = x$; Vertauschung der Variablen: $y = e^x$

Die Fkt $y = e^x$ heißt natürliche Exponentialfkt

Eigenschaften der natürl. Exponentialfkt.

$y = e^x > 0$

$f(0) = 1$

$f(1) = e$

$f(x) = \ln x \; ; \; f'(x) = \frac{1}{x}$

$x = e^y$ (Auflösung nach x)

$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = x = e^y$

Ableitungen:

$g'(x) = e^x \qquad g(x) = e^x$

Aufgaben:

$y = e^{ax} \; ; \; y' = e^{ax} \cdot a$

$y = e^{-bx} \; ; \; y' = e^{-bx} (-b)$

$y = e^x \cdot \sin x \; ; \; y' = e^x \sin x + e^x \cos x$

oder

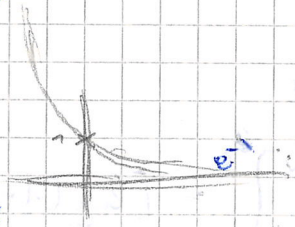
$f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$

$\ln f(x) = \ln(e^x \sin x) = \ln e^x + \ln \sin x = x \ln e + \ln \sin x = x + \ln \sin x$

$y' = e^x \cdot \sin x \left(1 + \frac{1}{\sin x} \cos x\right) = e^x \cdot \sin x (1 + \cot x)$

246 / 4a)

$f(x) = e^{-x} \; ; \; D = \mathbb{R}$



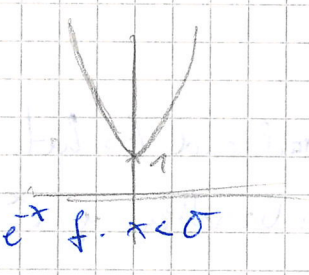
$f'(x) = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$

4d)

$f(x) = e^{|x|} \; ; \; D = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x$ f. $x > 0$

4e) $f'(x) = -e^{-x}$ f. $x < 0$



Steigung von e^x für $x = 0$:

$f'(0) = 1$

Steigung von e^{-x} für $x = 0$:

$f'(0) = -1$

} 90°-Sprung

$f(x) = |e^x - 1|$

$$|e^x - 1| = \begin{cases} e^x - 1 & \text{für } e^x > 1, \; x > 0 \\ 0 & \text{für } e^x = 1, \; x = \ln 1 \\ -e^x + 1 & \text{für } e^x < 1, \; x < 0 \end{cases}$$

246|8a

$f(x) = e^{-x}$ $\quad P(2|e^{-2})$

$f'(x) = -e^{-x}$

$f'(2) = -e^{-2} = \tan\varphi = -0,1353$ (II. Quadrant)

$\varphi = 180° - 7,705° \approx 172,3°$

9a)

$e^x = 2 \; ; \; x = \ln 2 \approx 0,69$

$P(0,69|2)$

$f(\ln 2) = e^{\ln 2}$

$x = b^y \; ; \; y = \log_b x$

$b^{\log_b x} = x$

$e^{\ln 2} = 2$

11a: 246|5b,c,d,e

5b)

$f(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$ $\quad D_{f(x)} = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$

5c)

$f(x) = e^{x^2}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2x \cdot e^{x^2}$

5d)

$f(x) = e^{\sqrt{x}} = e^{x^{\frac{1}{2}}}$ $\quad D_f = \mathbb{R}_0^+$

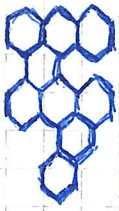
$f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$

5e)

$f(x) = \sqrt{e^x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^x}} \cdot e^x = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}$

WALK OF LIFE



Armageddon - Spielfeld

Burgen der Spieler

parallel: Schlacht || Spiel (Magie)

mehrere Ebenen: Land (Schlachten), Königshof

$f(x) = 3x - x^3$ Nst: $x = 0, \pm\sqrt{3}$

$f'(x) = 3 - 3x^2$

$f''(x) = -6x$ $= 0 \Rightarrow x = 0$ WP

alles bis auf Grenzwerte von Flächen

$y = mx + t$

$f(0) = f'(0)x + t$

$0 = 3x + t$

$0 = 3 \cdot 0 + t$

$t = 0$

$y = 3x$

x^2

Schnittstellen!

5. Berechne das Flächenstück oberhalb der x-Achse, das von den Bildkurven zu den Funktionen $y = a - \frac{x^2}{a}$ und $y = a^3 - ax^2$ $(a > 0; a \neq 1)$ begrenzt wird. Für welchen Wert von a $(0 < a < 1)$ hat diese Fläche den größten Inhalt? Wie groß ist er?

6. Berechne das bestimmte Integral $\int_0^3 (3 - \frac{1}{2}c^3x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}cx^3)\,dx$, und untersuche für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ es seinen größten bzw. kleinsten Wert hat? Wie groß sind diese Werte?

7. Berechne eines der Flächenstücke zwischen der Bildkurve zu $y = -\frac{x}{2} + \cos x$ und der Geraden $y = -\frac{x}{2}$!

8. Berechne die Fläche zwischen der Bildkurve zu $y = \frac{1}{2}x + \sin x$, der x-Achse sowie den Geraden $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$!

9. Berechne die Fläche zwischen der Bildkurve zu $y = \sin x + \cos x$ und den beiden Koordinatenachsen!

0. Wie groß ist die Fläche zwischen der Bildkurve zu $y = 2\sin x + \cos x$, den beiden Achsen und der Geraden $x = \frac{\pi}{2}$?

1. Berechne die Fläche zwischen der Bildkurve zu $y = \cos x - 1$ und der x-Achse zwischen 0 und 2π!

2. Gesucht ist die Fläche zwischen der Bildkurve zu $y = 2x^3 - 12x^2 - 30x + 120$ und der Verbindungsstrecke des Hochpunkts mit dem Wendepunkt.

3. Berechne die Fläche zwischen den Bildkurven zu $y = \frac{1}{8}(36 + 4x - x^2)$ und $y = 4{,}5$!

4. Wie 23. für $y = \frac{1}{6}(36 - x^2)$ und $y = \frac{1}{2}(6 - x)$.

5. Die Bildkurve zur Funktion $y = \lambda x^3 + ax^2 + bx$ hat für $x = 1$ einen Hochpunkt und für $x = 2$ einen Wendepunkt. Drücke zunächst die Koeffizienten a und b durch λ aus und bestimme dann λ so, daß die Bildkurve mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt 4 Flächeneinheiten bildet!

6. Berechne die von den Bildkurven zu folgenden Funktionen eingeschlossene Fläche:

a) $y = x^3$; $y = x$ b) $y = x^3$; $y = x^2$ c) $y = 1 + x^2$; $y = 3 - x^2$

d) $y = \frac{1}{2}(x^2 + x + 1)$; $y = \frac{1}{2}(9 + x - x^2)$ e) $y = x^2 + x + 1$; $y = 7 - x^2$.

7. Berechne die Fläche zwischen der Bildkurve zu $y = 6 + 4x - x^2$ und der Sehne durch die Punkte A $(-2;\ ?)$ und B $(4;\ ?)$!

28. Wie lautet die zur Funktion f gehörende Stammfunktion (Integralfunktion) F, deren Funktionswert für das angegebene Argument bekannt ist?

a) $f(x) = \frac{1}{10}(2x + 5)$; $F(2) = 4$ b) $f(x) = \frac{3}{8}x(4 - x)$; $F(4) = 4$

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$; $F(4) = 0$ d) $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{x^2}$; $F(2) = 0$

e) $f(x) = -\frac{x}{8}$; $F(2) = \frac{19}{4}$ f) $f(x) = x^3 - 4x$; $F(1) = 2{,}25$

g) $f(x) = 2 \cdot \sin x + x \cdot \sqrt{2}$; $F(0) = 1$.

29. Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 1 - \lambda x^2$; $\lambda > 0$. Bestimme λ so, daß das von den zugehörigen Bildkurven eingeschlossene Flächenstück den Inhalt $\frac{2}{3}$ Flächeneinheiten hat!

30. Berechne den Flächeninhalt des von den Bildkurven zu $y = \frac{1}{16}(x^3 + 2x^2)$ und $y = \frac{1}{4}(3x^3 - 10x)$ eingeschlossenen Flächenstückes für $x \geqq 0$!

31. Bestimme den Inhalt eines der Flächenstücke, das die Bildkurve zu $y = 3x - x^3$ mit ihrer Normalen im Wendepunkt einschließt!

32. Die Bildkurve zu einer Funktion $y = f(x)$ hat in jedem ihrer Punkte den Anstieg $m = 2\left(\frac{x}{3} - 1\right)$. Die Fläche, die von der Bildkurve zu $y = f(x)$, den beiden positiven Koordinatenachsen und der Geraden $x = 9$ eingeschlossen wird, hat den Inhalt 36 Flächeneinheiten. Wie lautet die Funktion?

33. Die Gerade $y - 7{,}5 = 0$ schneidet die Parabel $y = 4x - \frac{x^2}{2}$ in zwei Punkten A und B. Berechne den Inhalt der beiden Flächenstücke, die von der y-Achse, der Parabel und den Tangenten in A bzw. B begrenzt werden!

34. Die Bildkurve zur Funktion $y = \frac{x^4}{20} - \frac{6x^2}{5} + 4$ sei K_1, die zur Funktion $y = -\frac{4}{5}x^2 + \frac{16}{5}$ sei K_2. Welchen Inhalt hat das von beiden Kurven eingeschlossene Flächenstück? In welchem Verhältnis teilt die Kurve K_1 das von ihren beiden Wendetangenten und der Kurve K_2 eingeschlossene Flächenstück?

35. Berechne den Flächeninhalt des Kurvenzweiecks, das von den Bildkurven zu folgenden Funktionen gebildet wird:

a) $y = \sin x$; $y = 1 - \sin x$ für $0 \leqq x \leqq \pi$,

b) $y = \cos x$; $y = 1 - \cos x$ für $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$

36. Für welchen Wert von a (im Bereich $0 < a < 8$) ist die zwischen der Bildkurve zu $y = \frac{x^2}{4(a - 8)} + a$ und der x-Achse liegende Fläche am größten?

37. Berechne den Inhalt des Flächenstücks zwischen der Bildkurve zu $y = \frac{1 + x^2}{x^2}$, der positiven x-Achse und den Geraden $y = 2x$ und $x = 2$!

$f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)^x \qquad f'(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)^x \cdot \left[\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}\right]$

$f(x) = e^{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)^x} = e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$

$f'(x) = e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}\left[\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \cdot \left(+\frac{1}{x^2}\right)\right)\right] =$

$= \left(1-\frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right] =$

$= \left(1-\frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}\right]$

---

252 | 10 a, b

$f(x) = \log_{e^2}(ex) \; ; x \in \mathbb{R}^+$ $\qquad \log(ax) = \log a + \log x$

$\log_{e^2}(ex) = \frac{\ln(ex)}{\ln e^2} = \frac{\ln e + \ln x}{2\ln e} =$ $\qquad (\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a})$

$= \frac{1+\ln x}{2} = \frac{1}{2}(1+\ln x)$

oder: $(e^2)^y = ex$

$e^{2y} = ex$

$2y = \log_e ex = \ln ex$

$y = \frac{1}{2}\ln ex$

f^{-1}: $\frac{1}{2}(1+\ln x) = y$

$1+\ln x = 2y$

$\ln x = 2y-1$

$x = e^{2y-1}$

Umkehrfkt.: $y = e^{2x-1}$

$\int_{-8}^{-\frac{e}{2}} \frac{-4}{x}\,dx = -4\int_{-8}^{-\frac{e}{2}} \frac{1}{x}\,dx = -4\left[\ln|x|\right]_{-8}^{-\frac{e}{2}} = -4\left[\ln\left|-\frac{e}{2}\right| - \ln|-8|\right] =$

$= -4\left(1 - \ln 2 - \ln 8\right) = 4\ln 8 + 4\ln 2 - 4 =$

$= 4\left(\ln 16 - 1\right) = 4\ln 16 - 4$

$\int_0^a a^x\,dx = \left[\frac{a^x}{\ln a} + k\right]_0^a = \frac{a^a}{\ln a} + k + \frac{1}{\ln a} = \frac{a^a - 1}{\ln a} + k$

$\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx = \ln\left|e^x - e^{-x}\right| + c$

$$\int_{-e^2}^{-\sqrt{e}} \frac{2}{x}\,dx = 2\int_{-e^2}^{-\sqrt{e}} \frac{1}{x}\,dx = 2\left[\ln|x|\right]_{-e^2}^{-\sqrt{e}} =$$

$$= 2\ln\sqrt{e} - 2\ln e^2 = 1 - 4 = -3$$

252/10c

$f(x) = \frac{1}{2}(1+\ln x)$; $z = \ln x$

$P_1(x_0; f(x_0)$; $P_2(x_0; \ln x_0)$

$P_1(x_0; \frac{1}{2}(1+\ln x_0))$

Tangentengleichung:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$$

$$y = m(x-x_1) + y_1$$

$f'(x) = \frac{1}{2x}$ $\qquad z' = \frac{1}{x}$

$$\frac{1}{2x_0} = \frac{\frac{1}{2}(1+\ln x) - \frac{1}{2}(1+\ln x_0)}{x-x_0} \qquad \frac{1}{x_0} = \frac{\ln x - \ln x_0}{x-x_0}$$

$$\frac{1}{2x} = \frac{\frac{1}{2}(1+\ln x - 1 - \ln x_0)}{x-x_0}$$

$$\frac{1}{x_0} = \frac{\ln x - \ln x_0}{x-x_0}$$

d) $\ln x - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x-x_0)$

$\left[\cancel{\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \frac{1}{x}(x-x_0)}\right]$

$$\ln\frac{x}{x_0} = \frac{1}{x_0}(x-x_0)$$

$$\frac{x}{x_0} = e^{\frac{1}{x}(x-x_0)}$$

$$\ln\frac{x}{x_0} = \frac{x}{x_0} - 1$$

$$g_1: \frac{y - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln x_0}{x-x_0} = \frac{1}{2x_0}$$

$$g_1: y = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0} + \ln x_0\right)$$

$$g_2: y = \frac{x}{x_0} - 1 + \ln x_0$$

Berechnung des Schnittpunktes:

$g_1(x) = g_2(x)$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0} + \ln x_0\right) = \frac{x}{x_0} + \ln x_0 - 1$$

$$x + 2x_0\ln x_0 = 2x - 2x_0 + 2x_0\ln x_0$$

$$-x_0\ln x_0 + 2x_0 = x$$

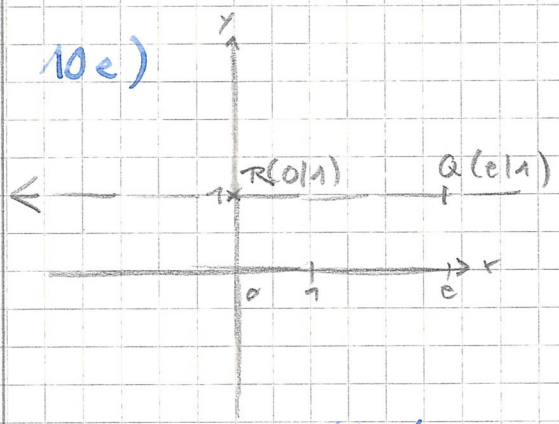
$\cancel{S(x_0\ln x_0 + 2x_0 \mid \ln(-x_0\ln x_0 + 2x_0))}$

$$y = \frac{x_0(2-\ln x_0)}{x_0} - 1 + \ln x_0 \qquad \text{in } g_2$$

$$y = 1$$

$$S(x_0(2-\ln x_0) \mid 1)$$

10 e)



zu zeigen: Max. von $x = x_0(2-\ln x_0)$ ist e

$f(x_0) = x_0(2-\ln x_0)$

$f'(x_0) = 1-\ln x_0$

$1-\ln x_0 = 0$

$x_0 = e$

$f''(x_0) = -\frac{1}{x_0}$

$f''(e) = -\frac{1}{e} < 0 \Rightarrow$ Max. an $x = e$

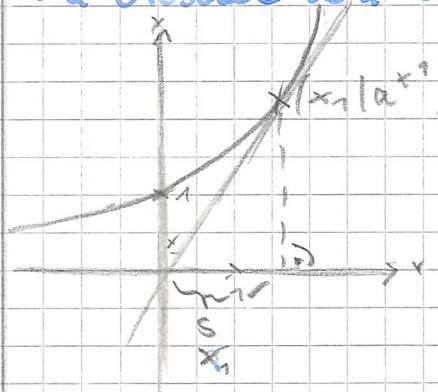
$\lim_{x \to +\infty} x_0(2-\ln x_0)$

$+\infty \quad -\infty$

$-\infty$

Aufgabe: Gegeben ist die Fkt. $y = a^x$

Bestimme die Tangente im Punkt $B(x_1|a^{x_1})$, zeige, daß die senkrechte Projektion der Tangente vom Berührpunkt B auf die Abszisse nicht vom Berührpunkt abhängt.



$s = x_1 - x$

$y = m(x-x_0)+y_0$

$f'(x_1) = \ln a \cdot a^{x_1}$

g: $y = a^{x_1} \cdot \ln a \cdot x_0 + t$ ////

$t = a^{x_1} - a^{x_1} \ln a \cdot x_1$

y: $y = a^{x_1} \ln x_1 + a^{x_1} - a^{x_1} \ln x_1$

$y = a^{x_1}(x_1 \ln a + 1 - \ln a x_1)$

$y = a^{x_1}$ / $y(x_1) = a^{x_1}$

$a^{x_1} = \ln a \cdot x_1 \cdot a^{x_1} + t$

$t = a^{x_1} - \ln a \cdot a^{x_1} \cdot x_1 = a^{x_1}(1 - \ln a \cdot x_1)$

g: $y = \ln a \cdot a^{x_1} \cdot x_1 + a^{x_1}(1 - \ln a \cdot x_1)$

$y = a^{x_1}(\ln a \cdot x_1 + 1 - \ln a \cdot x_1) = a^{x_1}$

Bestimmung der Tangentengleichung

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \qquad f'(x_1) = \ln a \cdot a^{x_1}$

$\frac{y - a^{x_1}}{x - x_1} = \ln a \, a^{x_1}$

$y = \ln a \, a^{x_1}(x - x_1) + a^{x_1}$

$y = a^{x_1}(\ln a (x - x_1) + 1)$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$y = a^{x_1}(\ln a (x - x_1) + 1) = 0$

~~$\ln a (x - x_1) = -1$~~

$\frac{-a^{x_1}}{x - x_1} = \ln a \, a^{x_1}$

$\frac{1}{x_1 - x} = \ln a$

$x - x_1 = -\frac{1}{\ln a}$

$x = x_1 - \frac{1}{\ln a}$

$s = x_1 - x_1 + \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$

$\Rightarrow$ ist vom Berührpunkt $(x_1 ; a^{x_1})$ unabhängig

Spezialfall: $a = e \; ; y = e^x$

$s = \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{\ln e} = 1$

247-19b

$f(x) = x + e^{-x}$

$x - 2y + 4 = 0$

$2y = x + 4$

$y = \frac{x}{2} + 2$

$f'(x) = 1 + e^{-x}$

$f'(x) = y'$

$1 - e^{-x} = \frac{1}{2}$

$e^{-x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{e^x} = \frac{1}{2}$

$e^x = 2$

$x = \ln 2 = 0{,}69$

$P(0{,}69 \mid 1{,}19)$

4.7 Die allgemeine Exponentialfkt.

$y = a^x$

Bestimmung der Ableitung:

Schreibweise: $z = e^{\ln z}$

Fälle $z = a^x$

$a^x = e^{\ln a^x}$

$a^x = e^{x \ln a}$

$(a^x)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$\boxed{\begin{array}{l} y = a^x \\ y' = \ln a \, a^x \end{array}}$

Integrationsformeln

$y' = e^x, \; y = e^x + c$

$\boxed{\int e^x dx = e^x + c}$

$y' = \ln a \cdot a^x, \; y = a^x + c$

$\int \ln a \cdot a^x dx = a^x + c$

$\ln a \int a^x dx = a^x + c$

$\boxed{\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k}$

$y = 2^x$; $y' = 2^x \cdot \ln 2$

$y = 10^x$; $y' = 10^x \cdot \ln 10$

$y = a^{2x}$; $y' = a^{2x} \cdot 2 \cdot \ln a$

$y = a^{x^2}$; $y' = a^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln a$

$y = 10^{2x+3}$; $y' = 10^{2x+3} \cdot 2 \cdot \ln 10$

$$\int (x + e^x)\,dx = \int x\,dx + \int e^x dx = \frac{x^2}{2} + e^x + c$$

250|2

$y = e^{|x|}$; $y = 2e - ex^2$

$e^{|x|} = -ex^2 + 2e$ Fallunterscheidung: $x > 0$

$e^x = -ex^2 + 2e$

Lösung durch Probieren: $x = 1$

$$A = 2 \cdot \int_0^1 (-e^x + 2e - ex^2)\,dx = 2 \cdot \left[2ex - \frac{ex^3}{3} - e^x\right]_0^1 =$$

$$= 2\left[2e - \frac{e}{3} - e - (-1)\right] = \frac{4}{3}e + 2$$

251|7

a) $x^x = e^{\ln x^x}$; $g(x) = e^{\frac{\ln x^x}{1}} = e^{\frac{x \ln x}{1}}$

~~b) $f'(x) = e^{x \ln x}$~~

b) $f'(x) = e^{x \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1) =$

$= x^x (\ln x + 1)$

8a) $f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$

$x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{x^{-1} \ln x}$

$f'(x) = -e^{x^{-1} \ln x}\left(\frac{-1}{x^2} \ln x + x^{-1} \frac{1}{x}\right) =$

$= e^{\frac{1}{x} \ln x}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x} \ln x}\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)$

8b) $f(x) = x^{\sqrt{x}} = e^{\ln x^{\sqrt{x}}} = e^{\sqrt{x} \ln x} = e^{x^{\frac{1}{2}} \ln x}$

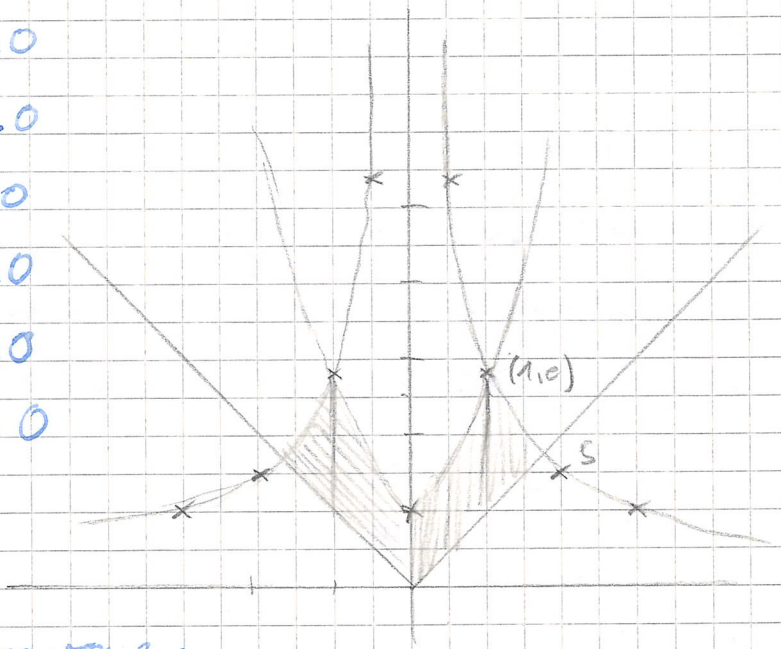
$f(x) = e^{x^{\frac{1}{2}} \ln x}\left(\frac{1 \ln x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\right)$

S. 250|3

$$y = |x| = \begin{cases} y = x & \text{für } x \geq 0 \\ y = -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{e}{|x|} = \begin{cases} +\frac{e}{x} & \text{für } x > 0 \\ -\frac{e}{x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$y = e^{|x|} = \begin{cases} e^x & \text{für } x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



Berechnung von S:

$\frac{e}{x} = x$ (Gleichsetzen)

$x = \sqrt{e}$

$$\frac{1}{2}A = \int_0^1 (e^x - x)\,dx + \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{e}{x} - x\right)dx =$$

$$= \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[e \cdot \ln x - \frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}} =$$

$$= e - \frac{1}{2} - 1 + e\,\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} = e - 1$$

$A = 2e - 2$

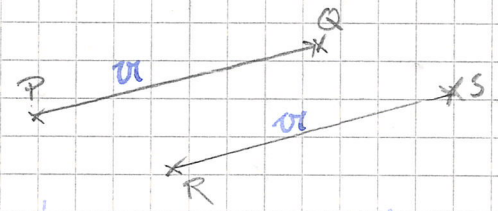
Analytische Geometrie

I. Vektorraum

1. geometrischer Vektorraum

1.1. geometrische Definition von Vektoren

Beispiel: TRANSLATION (Verschiebung)



$v := \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$

Definition: Jedes geordnete Punktepaar $(P|Q)$ heißt Pfeil.
P heißt Anfangspunkt, Q heißt Endpunkt.

$(P|Q)$ und $(R|S)$ repräsentieren dieselbe Translation:
$\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$,
$\overline{PQ} = \overline{RS}$,
$[PQ]$ und $[RS]$ sind gleichgerichtet.

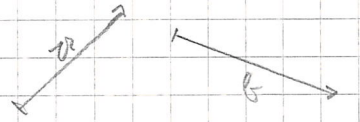
Man teilt die Menge V aller Pfeile in Klassen ein, mit der Eigenschaft: 1. sie sind nicht leer
2. zu jedem Pfeil $(P|Q)$ gibt es genau eine Teilmenge, die $(P|Q)$ enthält

Definition: Die Klasse alles zum Pfeil $(P|Q)$ gehörender Pfeile heißt Vektor $\overrightarrow{PQ}$. Jeder einzelne Pfeil aus der Klasse heißt Repräsentant des Vektors.
$(P|Q) \in \overrightarrow{PQ}$

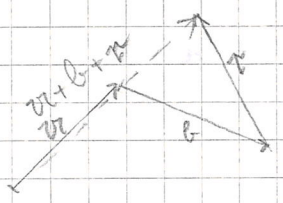
1.2. Addition von Vektoren:

$v = \overrightarrow{PQ}$
$b = \overrightarrow{QR}$
$v + b = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

Verallgemeinerung +







Kommutativgesetz:

$K_+: a+b = b+a \quad a,b \in V$

Assoziativgesetz:

$A_+: (a+b)+c = a+(b+c) \quad a,b,c \in V$

Nullvektor:

Klasse aller Pfeile mit identischem Anfangs- und Endpunkt $\vec{PP} = o$

$\vec{AP} + \vec{PP} = \vec{AP}$

Der Nullvektor ist das neutrale Element der Vektoraddition.

$N_+ \cdot a + o = a \quad a \in V$

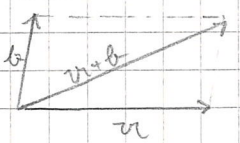
Inverses Element:

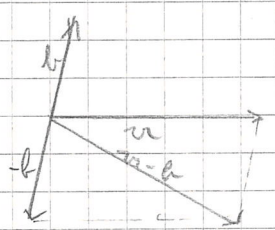
$\vec{PQ} + \varphi = \vec{PP} \qquad \vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{PP} = o$

$\vec{QP} = -\vec{PQ}$

$a + (-a) = o$

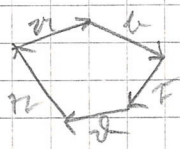
Konstruktion von a-b





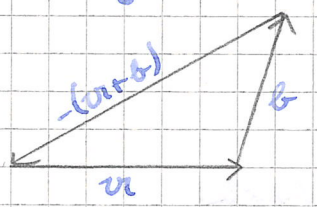
Sonderfall

geschlossene Vektorkette

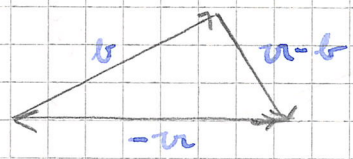


$a+b+c+d+e = o$

Anwendung –



$u + v + (-(u+v)) = 0$

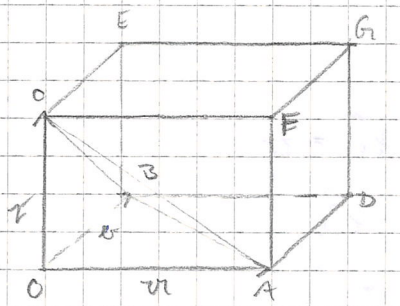


$v + u - v - u = 0$

Aufgaben

a) Von einem Punkt O aus laufen die Vektoren u, v, w, die ein Tetraeder OABC bestimmen. Ergänzen Sie es zu einem Parallelflach mit den Ecken D $(d = u + v)$, F $(f = w + u)$ G und berechne die vier Raumdiagonalen.

b) Beweisen Sie, daß die 4 Raumdiagonalen eine geschlossene Vektorkette bilden.



a) Raumdiagonalen: $\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AF} + \vec{AD} = u + w + v$

$\vec{EA} = -w + u - v$

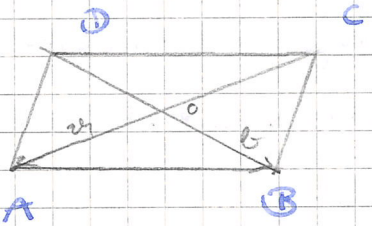
$\vec{DC} = +w - u - v$

$\vec{FB} = -u + v - w$

b) $\vec{OG} + \vec{EA} + \vec{DC} + \vec{FB} = 0$

O sei der Mittelpunkt des Parallelogramms ABCD mit den Halbdiagonalen $\vec{OA} = a$, $\vec{OB} = b$. Man drücke durch a, b aus:

1. $\vec{DO}, \vec{OD}, \vec{OC}$
2. $\vec{CB}, \vec{AD}, \vec{DA}$
3. $\vec{AB}, \vec{BA}, \vec{CD}$
4. $\vec{CA}, \vec{AC}, \vec{BD}$
5. $\vec{AD} + \vec{DB}, \vec{AB} + \vec{BO}$
6. $\vec{AC} - \vec{CB}, \vec{DC} - \vec{CA}$



1. $\vec{DO} = b, \vec{OD} = -b, \vec{OC} = -a$
2. $\vec{CB} = a + b, \vec{AD} = -a - b, \vec{DA} = a + b$
3. $\vec{AB} = b - a, \vec{BA} = a - b, \vec{CD} = a - b$
4. $\vec{CA} = 2a, \vec{AC} = -2a, \vec{BD} = -2b$
5. $\vec{AD} + \vec{DB} = -a - b + b + b = b - a$
   $\vec{AB} + \vec{BO} = b - a + -b = -a$
6. $\vec{AC} - \vec{CB} = -2a \mp (a + b) = -3a - b$
   $\vec{DC} - \vec{CA} = b - a - (2a) = b - 3a$

Vektoren als Gruppe bez. der Addition

1. Wenn $a, b \in V$, dann $a + b \in V$
2. Wenn $a \in V$, dann inverser Vektor $-a \in V$
3. In V gibt es genau einen Nullvektor o

Dabei gelten die Gesetze $a, b, c \in V$

$a + b = b + a$ K_+

$a + (b + c) = (a + b) + c$ A_+

$a + o = a$ N_+

$a + (-a) = o$ I

Wenn K_+ erfüllt ist, dann kommutative Gruppe (abelsche Gruppe).

1.3 S-Multiplikation von Vektoren

Bsp: $a + a + a = 3 \cdot a$

allgemein: $r \cdot a$ ist parallel zu a, $r \in \mathbb{R}^+$
hat für $r > 0$ dieselbe Richtung und ist r mal so lang.

$0 \cdot a = o$

$r \in \mathbb{R}^-$ $r \cdot a$ ist $\parallel$ zu a, entgegengesetzt gerichtet und $|r|$ mal so lang.

N. $1 \cdot a = a$

Rechengesetze der S-Multiplikation:

D_V $r(a+b) = r \cdot a + r \cdot b$ $\quad a, b \in V;\ r \in \mathbb{R}$

D_S $a(r+s) = a \cdot r + a \cdot s$ $\quad a \in V;\ r, s \in \mathbb{R}$

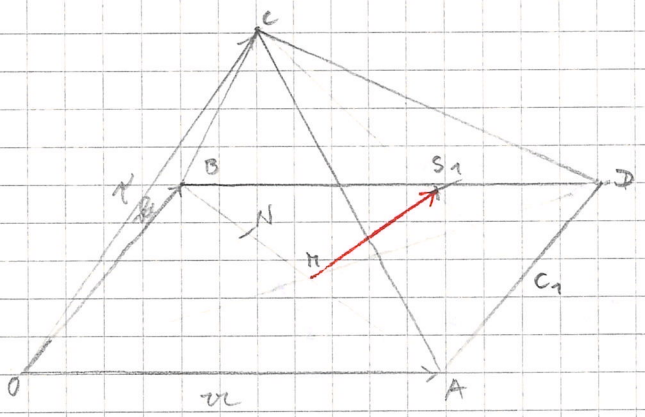
A. $(r \cdot s) \cdot a = r \cdot (s \cdot a)$ $\quad a \in V;\ r, s \in \mathbb{R}$

Division durch Vektoren ist nicht erklärt

Aufgabe:

Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ spannen das $\square OADB$ auf.
$\vec{c} = \vec{OC}$ bestimmt die Pyramidenspitze. M sei die $\square$-Mitte, C_1 der Mittelpunkt der Strecke $[AD]$, S_1 der Schwerpunkt des Dreiecks ADC.
Man drücke $\vec{r} = \vec{MS_1}$ durch $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aus.

Schwerlinie: Seitenhalbierende



Vektorkette: $O-M-S_1-C-O$

$\vec{OM} + \vec{MS_1} + \vec{S_1C} + \vec{CO} = \vec{0}$

$\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{r} + \vec{S_1C} - \vec{c} = \vec{0}$

Berechnung von $\vec{S_1C}$

$\vec{S_1C} = \frac{2}{3}\vec{C_1C}$

$\vec{C_1C} = \vec{CA} + \vec{AC_1} = \vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

$\vec{CA} = \vec{a} - \vec{c}$

Vektorkette: $O-A-C_1-C-O$

$\vec{r} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} - \frac{2}{3}(\quad)$

$\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{r} + \frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}) - \vec{c} = \vec{0}$

$\vec{r} = \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b} =$

$\frac{5}{3}\vec{c} - \frac{7}{6}\vec{a}$

$\vec{r} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{6}\vec{b}$

Drücke durch $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aus:

a) $\vec{BS_1}$ b) $\vec{NS_1}$ mit N := Mitte der Strecke $[BC]$

~~c) Vektorkette: $B-M-S_1-C-B$ oder $B-M-S_1$~~

a) Vektorkette $B - S_1 - M - B$

$$\mathfrak{y} + \overrightarrow{S_1M} + \overrightarrow{MB} = \cancel{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{o}$$

$$\mathfrak{y} + \left(-\tfrac{1}{6}\mathfrak{a} - \tfrac{1}{3}\mathfrak{c} + \tfrac{1}{6}\mathfrak{b}\right) + \frac{\mathfrak{b}-\mathfrak{a}}{2} = \mathfrak{o}$$

$$\mathfrak{y} = \tfrac{1}{6}\mathfrak{a} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{c} - \tfrac{1}{6}\mathfrak{b} - \tfrac{\mathfrak{b}}{2} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{a} =$$

$$= \tfrac{2}{3}\mathfrak{a} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{c} - \tfrac{2}{3}\mathfrak{b}$$

b) Vektorkette: $N - S_1 - M - N$

$$\overrightarrow{NS_1} + \overrightarrow{S_1M} + \overrightarrow{MN} = \cancel{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{o}$$

$$\overrightarrow{NS_1} + \left(-\tfrac{1}{6}\mathfrak{a} - \tfrac{1}{3}\mathfrak{c} + \tfrac{1}{6}\mathfrak{b}\right) + \frac{\mathfrak{b}-\mathfrak{a}}{4} = \mathfrak{o}$$

$K_+ A_+ N_+ I D_v D_s A. N.$

2. Abstrakter Vektorraum

1. Beispiel: geom. Vektorraum
2. Beispiel: $\mathbb{V} = \{(a_1; a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

1. Unter der Summe zweier Zahlenpaare versteht man:

   $(a_1|a_2) + (b_1|b_2) = (a_1 + a_2 | b_1 + b_2) \in \mathbb{V}$

2. $r \in \mathbb{R}$; $(a_1; a_2) \in \mathbb{V}$

   $r \cdot (a_1; a_2) = (r \cdot a_1; r \cdot a_2) \in \mathbb{V}$

3. $(a_1; a_2) \in \mathbb{V} \Rightarrow (-a_1; -a_2) \in \mathbb{V}$ Inv. bez. Add.
4. $(0; 0)$ neutr. El. bez. Add.



!

Überprüfung einiger Gesetze

K_+: $(a_1, a_2) + (b_1, a_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (b_1, b_2) + (a_1, a_2)$

A_+: stimmt auch!

I: $(a_1, a_2) + (-a_1, -a_2) = (0,0)$

Definition des abstrakten Vektorraums:

Es seien $a, b, c \in V$, $s, r \in \mathbb{R}$

Weiter sei erklärt

1. $a \in V, b \in V \Rightarrow a+b \in V$
2. $r \in \mathbb{R}, a \in V \Rightarrow r \cdot a \in V$
3. $a \in V \Rightarrow -a \in V$
4. $0 \in V$

Dabei gelten die Gesetze

K_+ $a+b = b+a$

A_+ $(a+b)+c = a+(b+c)$

N_+ $a+0 = a$

I $a+(-a) = 0$

D_v $r \cdot (a+b) = r \cdot a + r \cdot b$

D_s $a \cdot (r+s) = a \cdot r + a \cdot s$

$A_\cdot$ $r \cdot (s \cdot a) = (r \cdot s) \cdot a$

$N_\cdot$ $a \cdot 1 = a$

3. Modelle

Beispiel: Vektorraum der Polynome höchstens 3. Grades

$$a = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Erklärung der Addition

$$b = b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

$$a + b = (a_3+b_3)x^3 + (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$$

$$r \cdot a = ra_3 x^3 + ra_2 x^2 + ra_1 x + ra_0$$

HA: 3 Gesetze

Satz: Die Menge aller Polynome höchstens n-ten Grades ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Beweis: $v = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$w = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ n endlich

(1) $v + w = (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$

$\in V$ wegen $a_i + b_i \in \mathbb{R}$

(2) $\tau \cdot v = \tau \cdot a_n x^n + \tau \cdot a_{n-1} x^{n-1} + \dots + \tau a_1 x + \tau \cdot a_0$

$\in V$ wegen $\tau \cdot a_i \in \mathbb{R}$

(3) $-v = -a_n x^n - \dots - a_1 x - a_0$

$\in V$ wegen $-a_i \in \mathbb{R}$

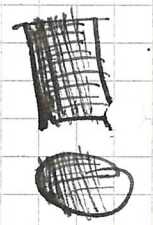
(4) $0 = 0 \cdot x^n + \dots + 0x + 0$

$\in V$ wegen $0 \in \mathbb{R}$

KANIDDSAN gelten!

S. 35/2

Beh.: Menge aller Polynome genau 2. Grades bildet keinen Vektorraum



Beweis: $v = 7x^2 + 3x$

$w = -7x^2 + 3$

$v + w = 0x^2 + 3x + 3$ ein Pol. 2. Grades ($v + w \notin V$)

HA: S. 36/3a, b

a) $M = \{(a|b|c) \mid a = 2b \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$ $\tau \in \mathbb{R}$

$v \cdot \tau = (\tau \cdot a \mid \tau \cdot b \mid \tau \cdot c)$ ✓ $\tau \cdot a = 2 \cdot \tau \cdot b$ wenn $a = 2b$

$(a_1|b_1|c_1) + (a_2|b_2|c_2) = (a_1 + a_2 \mid b_1 + b_2 \mid c_1 + c_2)$ ✓

$2(b_1 + b_2) = a_1 + a_2$

$(a|b|c) + (-a|-b|-c) = (0|0|0)$

inv. Element $\in V$ u. ~~inv.~~ Element $\in V$

$\Rightarrow$ M ist Vektorraum

6) $M = \{(a|b|c) \mid a \leq b \leq c \wedge a,b,c \in \mathbb{R}\}$

Inv. Element: $(-a|-b|-c) \notin M$, da $-a \geq -b$ für $a \leq b$

$\Rightarrow$ M ist kein Vektorraum

3.3 Vektorraum der n-Tupel

$$V = \{(a_1, a_2, a_3 \ldots a_n) \mid a_1 \ldots a_n \in \mathbb{R}\}$$

Erklärung der Addition, Multiplikation, inv. Element, Nullvektor

(1) $(a_1, a_2, \ldots a_n) + (b_1, b_2, \ldots b_n) = (a_1+b_2, a_2+b_2, \ldots a_n+b_n) \in V$

wegen $a_i + b_i \in \mathbb{R}$

(2) $\tau \cdot (a_1, a_2, \ldots a_n) = (\tau \cdot a_1, \tau \cdot a_2, \ldots \tau \cdot a_n) \in V$ wegen $\tau \cdot a_i \in \mathbb{R}$

(3) $(-a_1, -a_2, \ldots -a_n) \in V$ wegen $-a_i \in \mathbb{R}$

(4) $(0,0,\ldots 0) \in V$ wegen $0 \in \mathbb{R}$

Überprüfung der Axiome KANIDDS A, N.

I: $v + (-v) = o$

$(a_1, a_2, \ldots a_n) + (-a_1, -a_2, \ldots -a_n) = (a_1-a_1, a_2-a_2, \ldots a_n-a_n) = (0,0,\ldots 0)$

N: $1 \cdot v = v$

$1 \cdot (a_1, a_2, \ldots a_n) = (1 \cdot a_1, 1 \cdot a_2, \ldots 1 \cdot a_n) = (a_1, a_2, \ldots a_n)$

<u>Satz</u>: Die Menge aller reellen n-Tupel ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.
Man bezeichnet ihn als $\mathbb{R}^n$.

Sonderfälle: $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ $\quad (3,4) \in \mathbb{R}^2 \quad (2,7,0) \in \mathbb{R}^3$

Neue Schreibweise: $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Def.: Es sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$ (nichtleer)

Dann heißt U Untervektorraum von V, wenn gilt:

(1) Für alle $v, b \in U$ ist auch $v + b \in U$

(2) Für alle $\tau \in \mathbb{R}$ und $v \in U$ ist auch $\tau \cdot v \in U$

3c) $M = \{(a|b|c) \mid a \cdot b = 0 \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$

(1) $v + b = (a_1|b_1|c_1) + (a_2|b_2|c_2) = (a_1 + a_2 | b_1 + b_2 | c_1 + c_2)$

Kein Untervektorraum, da $(a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2)$ nicht 0 sein muß.

3d) $M = \{(a|b|c) \mid a = b = c \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$v + b = (a_1 + a_2 | b_1 + b_2 | c_1 = c_2) \Rightarrow a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2$ für $a_{1/2} = b_{1/2} = c_{1/2}$

$\tau \cdot v = (\tau a | \tau b | \tau c) \Rightarrow \tau a = \tau b = \tau c$ für $a = b = c$

$\Rightarrow$ Untervektorraum

Eigenschaft der Abgeschlossenheit (1)

V. Basis und Dimensionen

1. Linearkombination

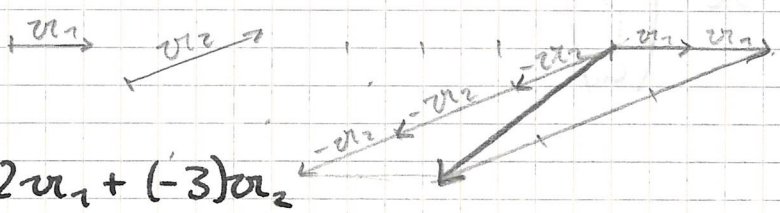
Def.: $\{a_1, v_2, v_3, \dots v_n\}$ sei eine Menge von Vektoren

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n)$ sei ein n-Tupel reeller Zahlen

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots \lambda_n \cdot v_n = 6 = \vec{s}$$

Der Vektor 6 heißt Linearkombination der Vektoren $v_1 \dots v_n$.

Beispiel: geom. Vektorraum $(\lambda_1, \lambda_2) = (2, -3)$



$6 = 2v_1 + (-3)v_2$

Beispiel: Vektorraum der Polynome höchstens 2. Grades

$v_1 = (-5x^2) + 3x + 2$

$v_2 = x^2 + 1$

$v_3 = 2x$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 0, -2)$

Linearkombination:

$6 = (-5x^2 + 3x + 2) \cdot 1 + (x^2 + 1) \cdot 0 + 2x(-2) =$

$= -5x^2 - x + 2$

Sonderfall: $6 = \vec{0}$

Nullsumme $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots \lambda_n + v_n = \vec{0}$

$(\lambda_1, \dots \lambda_n) = (0, \dots 0)$ ist triviale Nullsumme

nicht-triviale Nullsumme: mindestens ein $\lambda_i \neq \vec{0}$

Beispiel:

$v_1 = x^2 + 1 \qquad v_2 = 2x^2 + 2$

$(\lambda_1; \lambda_2) = (0, 0)$ ist möglich

$(\lambda_1; \lambda_2) = (2; -1)$ auch

Untersuchung am geometr. Vektorraum

1. Fall v_1

$\lambda_1 \cdot v_1 = \vec{0}$ nicht-triviale Nullsumme für $v_1 = \vec{0}$

triviale Nullsumme für ~~$v_1 \neq \vec{0}$~~ sowieso

2. Fall v_1, v_2

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \vec{0}$

~~Mindestens ein $v_i = \vec{0}$~~ a) $v_1 = \vec{0}$

$(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 0)$ nicht-triviale Nullsumme

b) $v_1, v_2 \neq \vec{0}$

$\lambda_1 v_1 = -\lambda_2 v_2$

$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2, \lambda_1 \neq 0$ nicht-triviale Nullsumme

$\Rightarrow v_1 \parallel v_2$

parallele Vektoren = kollineare Vektoren

$v_1 \nparallel v_2$ ⇒ nur triviale Nullsumme möglich!

3. Fall: v_1, v_2, v_3

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = o$$

a) sei $v_1 = o$

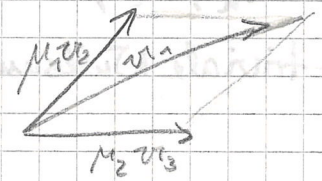
$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (47, 0, 0)$ nicht-trivial möglich

b) sei $v_1, v_2, v_3 \neq o$; v_1, v_2, v_3 nicht parallel

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = o \quad , \quad \lambda_1 \neq 0$$

$$\lambda_1 v_1 = -\lambda_2 v_2 - \lambda_3 v_3$$

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3$$



v_1, v_2, v_3 in einer Ebene

⇒ sie sind komplanar

Annahme: 3 Vektoren in einer Ebene

$$v_2 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_3$$

$$v_2 - \mu_1 v_1 - \mu_2 v_3 = o$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, \mu_1, \mu_2)$$

Folgerung: 3 nicht-komplanare Vektoren ⇒ nur triviale N.

4. Fall: v_1, v_2, v_3, v_4

a) $v_1 = 0$

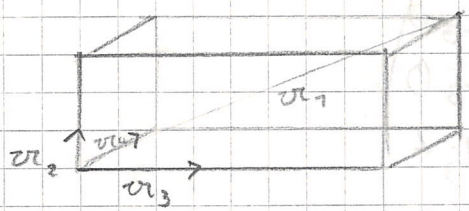
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (16, 0, 0, 0)$

b) $v_1, v_2, v_3, v_4 \neq 0$

Annahme: $\lambda_2 \neq 0$

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3 - \frac{\lambda_4}{\lambda_1} v_4$$



Diese Konstruktion ist bei 4 Vektoren immer möglich.

Bei 4 geom. Vektoren ist immer eine nicht-triviale Nullsumme möglich

Umkehrung: $v_4 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3$

$v_4 - \mu_1 v_1 - \mu_2 v_2 - \mu_3 v_3 = 0$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (-\mu_1, -\mu_2, -\mu_3, 1)$

$\Rightarrow$ nicht-triviale Nullsumme möglich

Definition: Eine Menge von Vektoren heißt <u>linear abhängig</u>, wenn man mit ihnen eine nicht-triviale Nullsumme bilden kann, andernfalls heißt die Menge <u>linear unabhängig</u>.

Bsp.: 2 parallele geom. Vektoren sind linear abhängig.

4 Vektoren sind immer linear abhängig.

wenn 1 Vektor 0 ist, dann alle linear abhängig

Satz: $\{v_1, \dots v_n\}$ linear unabhängig $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$
mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_n = 0$

Bsp.: Vektorraum der 4-Tupel

$v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$0 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 6 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 \\ \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 5 + \lambda_3 \cdot 0 \\ \lambda_1 \cdot 3 + \lambda_2 (-3) + \lambda_3 7 \\ \lambda_1 \cdot 4 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

I. $0 = 6\lambda_1$ II. $0 = 2\lambda_1 + 5\lambda_2$

III. $0 = \lambda_1 \cdot 3 - 3\lambda_2 + 7\lambda_3$

IV. $0 = 4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3$

aus I: $\lambda_1 = 0$

in II: $0 = 5\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

in III: $0 = 7\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 0$

Bsp.: Vektorraum der 4-Tupel

$v_1 = (6; 2; 3; 4)$, $v_2 = (3; 1; 1{,}5; 2)$

$0 = \lambda_1 (6; 2; 3; 4) + \lambda_2 (3; 1; 1{,}5; 2)$

$\Rightarrow$ v_1, v_2 sind linear abhängig.

Weitere Sätze:

Satz: Jede Menge von Vektoren, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

Beweis: $\{\vec{0}, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots \vec{v}_n\}$

$\lambda_1 \vec{0} + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n) = (16, 0, \dots 0)$

Satz: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ mindestens ein Vektor $\vec{v}_i$ läßt sich als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen.

Beweis: $\vec{v}_1 = \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 + \dots \lambda_n \vec{v}_n$

$\vec{0} = -\vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots \lambda_n \vec{v}_n$

$\Downarrow$

$\lambda_1 = (-1)$ $\Rightarrow$ ~~kein~~ nicht-triviale N. möglich

Satz: Jede Obermenge einer linear abhängigen Vektormenge ist linear abhängig.

Beweis: $\{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_m\} \subset \{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1} \dots \vec{v}_{m+n}\}$

$\vec{0} = \underbrace{\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots \lambda_m \vec{v}_m}_{\text{ein } \lambda_i \neq 0} + \lambda_{m+1} \vec{v}_{m+1} + \dots \lambda_{m+n} \vec{v}_{m+n}$

$\Rightarrow$ nicht-triviale N. für alle Vektoren möglich

S. 45/7a

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{0}$

I. $7\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

II. $5\lambda_1 - \lambda_2 = 0$

I + II. $12\lambda_1 = 0$ $\quad \lambda_1 = 0$

in II: $5 \cdot 0 - \lambda_2 = 0$ $\quad \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \vec{v}, \vec{b}$ linear unabhängig

7b) $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 \begin{pmatrix} +2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \in \\ -16 \end{pmatrix} = 0$

I. $-2\lambda_1 + 8\lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{4}$ in II: $0 = 0$ (w)

II. $4\lambda_1 - 16\lambda_2 = 0$

$\Rightarrow a, b$ linear abhängig

10) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \ldots a_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots \lambda_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

I. $0 = \lambda_1$

II. $0 = \lambda_2 \quad \Rightarrow a_1 \ldots a_n$ linear unabhängig

.....

N: $0 = \lambda_n$

12a) $a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

I. $3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_2 = 3\lambda_1 \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_2}{3}$

II. $2\lambda_1 + \lambda_2 + 10\lambda_3 = 0$

III. $-\lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \quad \Rightarrow \frac{\lambda_2}{3} = \Rightarrow \lambda_3 = -\frac{\lambda_1}{2}$

in II: $2\lambda_1 + 3\lambda_1 + 10\left(-\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0$

$0 = 0$ (w)

Wähle $\lambda_1 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ linear abhängig

2. Basis und Dimension

Definition: Eine Menge $\{b_1, b_2, \ldots b_n\}$ von Vektoren eines Vektorraums V heißt Basis von V, wenn gilt:

1. $\{b_1 \ldots b_n\}$ sind linear unabhängig
2. Jeder Vektor $a \in V$ läßt sich als Linearkombination von $b_1 \ldots b_n$ darstellen

Die Menge der Vektoren $\{b_1 \ldots b_n\}$ spannen den Vektorraum V auf

Beispiel: V sei der Vektorraum der reellen Tripel

$b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, b_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, b_3 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

(1) $o = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

I. $0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

II. $0 = \lambda_1 + \lambda_2$

III. $0 = \lambda_1$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow b_1, b_2, b_3$ linear unabhängig

(2) $v = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$

$v = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

I $a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

II $a_2 = \lambda_1 + \lambda_2$

III $a_3 = \lambda_1$ in II: $a_2 = a_3 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = a_2 - a_3$

in I: $a_1 = a_3 + a_2 - a_3 + \lambda_3$

$\Rightarrow \lambda_3 = a_1 - a_2$

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = a_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + (a_2 - a_3)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + (a_1 - a_2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Bsp: $v = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

aus (1) und (2) folgt: $\{b_1, b_2, b_3\}$ bilden Basis

S. 60/6a

$v = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

(1) $o = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

I: $0 = \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3$

II: $0 = 2\lambda_1 + 5\lambda_2$

III: $0 = \lambda_1$

in II: $0 = 5\lambda_2, \lambda_2 = 0$

in I: $0 = 0 + 3\cdot 0 + 2\lambda_3, \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow v, b, c$ linear unabhängig

(2) $\vec{v} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I: $d_1 = \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3$

II: $d_2 = 2\lambda_1 + 5\lambda_2$

III $d_3 = \lambda_1$

in II: $d_2 = 2d_3 + 5\lambda_2$

$\lambda_2 = \frac{d_2 - 2d_3}{5}$

in I: $d_1 = d_3 + \frac{3}{5}(d_2 - 2d_3) + 2\lambda_3$

$2\lambda_3 = d_1 - d_3 - \frac{3}{5}(d_2 - 2d_3)$

$\lambda_3 = \frac{d_1}{2} - \frac{d_3}{2} - \frac{3}{10}d_2 + \frac{3}{5}d_3$

HA: S1/10

Definition:

Hat ein Vektorraum V eine Basis der Länge n, so heißt n die Dimension des Vektorraums: $\dim V = n$

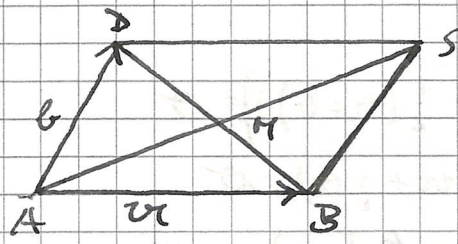
Folglich sind in einem Vektorraum der Dimension n je $(n+1)$ Vektoren linear abhängig.

3. Anwendung der linearen Unabhängigkeit bei geometrischen Beweisen und Aufgaben

1. Beispiel

1 Basisvektor:	$\vec{b}_1$ →	(Gerade wird aufgespannt)
2 B.vektoren	$\vec{b}_2$ ↗ $\vec{b}_1$ →	(Ebene wird ")
3 B.vektoren	↕ →	(geom. Raum wird aufgespannt)

In einem ▱ halbieren sich die Diagonalen:



Vektorkette A-M-B-A

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = o$

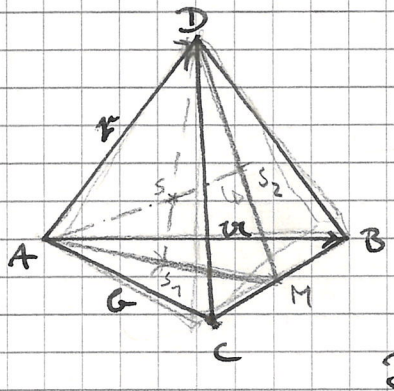
$\lambda(a+b) + \mu(a-b) - a = o$ Vermutung: $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$

$a(\lambda+\mu-1) + b(\lambda-\mu) = o$

a, b linear unabhängig

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } \lambda+\mu-1=0 \\ \text{II. } \lambda-\mu=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \mu = \frac{1}{2}$$

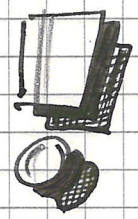
2. Beispiel Die Schwerlinien eines Tetraeders teilen sich im Verhältnis 1:3.



Vektorkette: A-S_1-S-A

$\overrightarrow{AS_1} + \overrightarrow{S_1S} + \overrightarrow{SA} = o$

$\overrightarrow{AS_1} + \lambda\overrightarrow{S_1D} + \mu\overrightarrow{S_2A} = o$

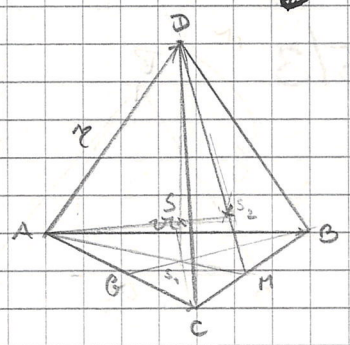


Berechnung von $\overrightarrow{AS_1}$:

$\overrightarrow{AS_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AS_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(a+b)$

$\overrightarrow{AS_1} = \frac{1}{3}(a+b)$



Berechnung von $\overrightarrow{S_1D}$:

$\overrightarrow{S_1D} = x - \frac{1}{3}(a+b)$

Berechnung von $\overrightarrow{S_2A}$: Vektorkette: S_2-A-M-S_2

$\overrightarrow{S_2A} + \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{3}\overrightarrow{MD} = o$

$\overrightarrow{MD} = x - \frac{1}{2}(a+b)$

$\overrightarrow{S_2A} + \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}(a+b)\right) = o$

$\overrightarrow{S_2A} = -\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}(a+b)\right)$

$\overrightarrow{AS_1} + \lambda \overrightarrow{S_1D} + \mu \overrightarrow{S_2A} = \sigma$

$\frac{1}{3}(a+b) + \lambda\left(c - \frac{1}{3}(a+b)\right) + \mu\left(-\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{3}\left(c - \frac{1}{2}(a+b)\right)\right) = \sigma$

$\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \lambda\left(c - \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b\right) + \mu\left(-\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{3}c + \frac{1}{6}a + \frac{1}{6}b\right) = \sigma$

$a\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{6}\mu\right) + b\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{6}\mu\right) + c\left(\lambda - \frac{1}{3}\mu\right) = \sigma$

a, b, c linear unabhängig:

I $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{2}\mu = 0$ $\quad \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{3}\mu = \sigma$; $\frac{1}{3}(1 - \lambda - \mu) = \sigma$

II $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{3}\mu = \sigma$; $\frac{1}{3}(1 - \lambda - \mu) = \sigma$

$1 - \lambda - \mu = \sigma$

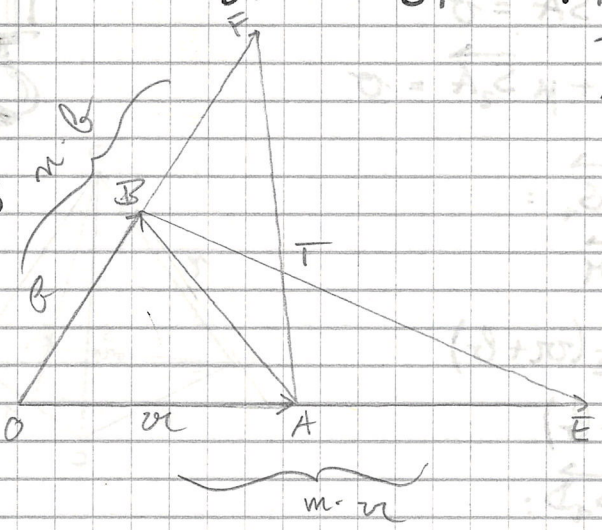
III $\lambda - \frac{1}{3}\mu = \sigma$; $\lambda = \frac{1}{3}\mu$

in (s.o.) $1 - \frac{1}{3}\mu - \mu = \sigma$

$1 - \frac{4}{3}\mu = \sigma$; $\frac{4}{3}\mu = 1$; $\mu = \frac{3}{4}$

$\lambda = \frac{1}{4}$

S. 55/3



$\overrightarrow{OE} = m \cdot a$

$\overrightarrow{OF} = n \cdot b$

Ergänzt: $\overrightarrow{AT}$; $\overrightarrow{BT}$; $\frac{\overline{ET}}{\overline{TB}}$; $\frac{\overline{AT}}{\overline{TF}}$

Vektorkette O-A-T-B-O

$a + \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} - b = \sigma$

$\overrightarrow{AT} = \lambda \overrightarrow{AF} = \lambda(n \cdot b - a)$

$\overrightarrow{TB} = \mu \overrightarrow{EB}$ ~~$\overrightarrow{BE} = \mu(m \cdot a - b)$~~

$\overrightarrow{TB} = \mu \overrightarrow{EB} = \mu(b - m \cdot a)$

$a + \lambda(nb - a) + \mu(b - ma) - b = \sigma$

$a(1 - \lambda - \mu m) + b(n\lambda + \mu - 1) = \sigma$

a, b linear unabhängig $\Rightarrow$

I. $1 - \lambda - \mu m = \sigma$

II $1 - \mu - n\lambda = \sigma$; $n\lambda + \mu - 1 = \sigma$

aus I. $\lambda = 1 - \mu m$

~~in II: $\mu - n(1-\mu m) = 0$~~

$1-n$

in II: $n(1-\mu m) + \mu - 1 = 0$

$n - \mu m n + \mu = 1$

$\mu = \frac{1-n}{1-mn}$

in I: $\lambda = 1 - m\left(\frac{1-n}{1-mn}\right)$

$\lambda = \frac{1-mn-m+mn}{1-mn} = \frac{1-m}{1-mn}$

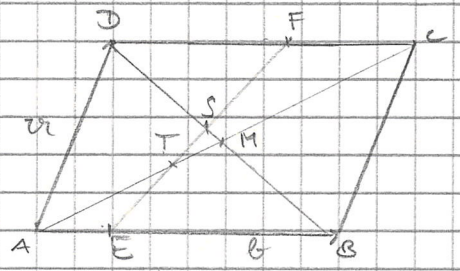
$\overrightarrow{AT} = \frac{1-m}{1-mn}(nb - a)$

$\overrightarrow{BT} = \frac{1-n}{1-mn}(b - ma)(-1)$

$\frac{\overline{ET}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{BE} - \mu\overline{BE}}{\mu\overline{BE}} = \left(\frac{1-\mu}{\mu}\right) = \frac{1 - \frac{1-n}{1-mn}}{\frac{1-n}{1-mn}} = \frac{n-mn}{1-n}$

$\frac{\overline{AT}}{\overline{TF}} = \frac{\lambda\overline{AF}}{\overline{AF} - \lambda\overline{AF}} = \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{1-m}{m-mn}$

55/5a



$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = m \quad ; \quad \frac{\overline{CF}}{\overline{FD}} = n$

~~Vektorkette: A T S D A A T E A~~

~~$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TE} + \overrightarrow{EA} = 0$~~

ges.: $\frac{\overline{AT}}{\overline{TC}}$

Vektorkette:

$\frac{\overline{AT}}{\overline{TC}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{AE}}$

$\overrightarrow{EF} = n \cdot \overrightarrow{FD}$

$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{FC} = n(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FC})$

$\overrightarrow{FC} = n(b - \overrightarrow{FC})$

$\overrightarrow{CF} = n(-b \quad \overrightarrow{CF})$

$\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AT}$

$= \overrightarrow{CA} - \mu\overrightarrow{AC} \qquad = -\overrightarrow{AC} - \mu\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE} = m \cdot \overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{CF} = n \cdot \overrightarrow{FD}$

$\overrightarrow{EB} = 1 \cdot \overrightarrow{EB}$ $\quad$ $\overrightarrow{FD} = 1 \cdot \overrightarrow{FD}$

$b - v = \overrightarrow{EB}(1+m)$ $\quad$ $-b = \overrightarrow{FD}(1+n)$

$\frac{b-v}{1+m} = \overrightarrow{EB}$ $\quad$ $\frac{-b}{n+1} = \overrightarrow{FD}$

$\overrightarrow{AE} = m \cdot \frac{b-v}{1+m}$ $\quad$ $\overrightarrow{CF} = \frac{n}{n+1}(-b)$ ✓

Vektorkette A-E-T-A

$\frac{m}{1+m} v + \lambda \overrightarrow{EF} + \mu(v+b) = 0$

$\overrightarrow{EF}$: Vektorkette A-E-F-D-A

$\frac{m}{1+m} v + \overrightarrow{EF} + \frac{-v}{n+1} - b = 0$

$\overrightarrow{EF} = b + \frac{v}{n+1} - \frac{m \cdot v}{1+m}$

$\frac{m}{1+m} v + \lambda \left(b + \frac{v}{n+1} - \frac{m \cdot v}{1+m} \right) + \mu(v+b) = 0$

$v\left(\frac{m}{1+m} + \frac{\lambda}{n+1} - \frac{m\lambda}{1+m} + \mu\right) + b(\lambda+\mu) = 0$; v, b linear unabhängig $\Rightarrow$

I. $\lambda + \mu = 0$; $-\lambda = +\mu$

II. $\frac{m(1-\lambda)}{1+m} + \frac{\lambda}{n+1} + \mu = 0$

in II: $+\frac{m}{1+m} + \frac{\lambda}{n+1} - \frac{\lambda m}{1+m} - \lambda = 0$

$\lambda\left(\frac{1}{n+1} - \frac{m}{1+m} - 1\right) = -\frac{m}{1+m}$

$\lambda \cdot \frac{n+1-m(n+1)-(n+1)(m+1)}{(n+1)(1+m)} = \frac{-m}{1+m}$

$\lambda \cdot \frac{-2mn-m-n}{(n+1)(1+m)} = \frac{-m}{1+m}$

$\lambda = -m\left(\frac{n+1}{-2mn-m-n}\right)$

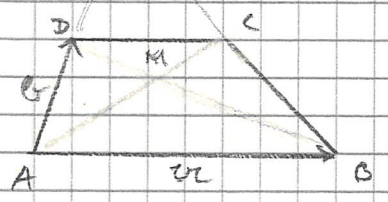
$\lambda = \frac{m(n+1)}{2mn+m+n} = -\mu$

$\frac{\overline{AT}}{\overline{CT}} = \frac{-\mu \overline{AC}}{\overline{AC} + \mu \overline{AC}} = \frac{-\mu}{1-\mu} =$

$\overline{AT} = -\mu \overline{AC} = -\mu(v+b)$

$= \frac{+m(n+1)}{(+2mn+m+n)\left(1+\frac{mn+m}{2mn+m+n}\right)} = \frac{mn+m}{2mn+m+n+mn+m}$

55/4a



$\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$; $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$

ges.: $\vec{DC}$, $\vec{BC}$, $\vec{AC}$, $\vec{BD}$

~~Vektorkette A-D-C-B-A~~ $\vec{DC} = \frac{1}{2}a$ ($\vec{DC} \parallel a$; $|\vec{DC}| = \frac{1}{2}|a|$)

~~$b + \frac{1}{2}a + \vec{CB} - a = o$~~

Vektorkette: A-B-C-D-A

$a + \vec{BC} - \frac{1}{2}a - b = o$

$\vec{BC} = b - \frac{1}{2}a$

Vektorkette A-C-D-A

$\vec{AC} - \frac{1}{2}a - b = o$

$\vec{AC} = b + \frac{1}{2}a$

Vektorkette A-B-D-A

$a + \vec{BD} - b = o$

$\vec{BD} = b - a$

b) Vektorkette A-E-B-A

$2b + 2(\frac{1}{2}a - b) - a \neq o$ (Annahme: es ist nicht so)

$2b + a - 2b - a \neq o$ ($\Leftrightarrow$) $o \neq o$ (↯)

$\Rightarrow$ E existiert

c) A-M-B-A

$\lambda\vec{AC} + \mu\vec{DB} - a = o$

$\lambda(b + \frac{1}{2}a) + \mu(a - b) - a = o$

$a(\frac{1}{2}\lambda + \mu - 1) + b(\lambda - \mu) = o$ linear unabhängig:

I. $\frac{1}{2}\lambda + \mu - 1 = 0$

II. $\lambda - \mu = 0$; $\lambda = \mu$

in I: $\frac{1}{2}\lambda + \lambda - 1 = 0$; $\frac{3}{2}\mu = 1$; $\mu = \frac{2}{3}$

III. Koordinaten

1. Basisdarstellung

$\{b_1, \dots b_n\}$ sei Basis eines n-dim. Vektorraums

$v = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad ; a_i \in \mathbb{R}$

Schreibweise als n-Tupel $(a_1, \dots a_n)$ oder $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = v$

$a_1 \dots a_n$ heißen Koordinaten von v bez. der Basis $\{b_1, \dots b_n\}$

$a_1 b_1, \dots a_n b_n$ heißen Komponenten

Beispiel: Vektorraum der reellen Tripel

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Basis

ges.: Komponenten von $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

I. $1 = a_1 + a_3$
II. $2 = a_2 + a_3$
III. $3 = a_1 + a_2$

} II. − I. : $1 = a_2 - a_1$ IV.

III + IV. : $4 = 2a_2$; $a_2 = 2$

$a_3 = 0$

$a_1 = 1$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ bez. Basis

Komponenten: $1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

I. $1 = c_1 + c_3$
II. $0 = c_2 + c_3$
III. $0 = c_1 + c_2$

} III − II : $0 = c_1 - c_3$; $c_1 = c_3$

in I : $1 = 2c_1 = 2c_3$; $c_1 = \frac{1}{2}$; $c_3 = \frac{1}{2}$

in II : $0 = c_2 + \frac{1}{2}$; $c_2 = -\frac{1}{2}$

$M = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ bez. Basis

Komponenten: $0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

$-0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

$+0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Koordinaten der Basisvektoren $\{b_1 \dots b_n\}$

$b_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots a_n b_n$; $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $\vdots$, $a_n = 0$

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad b_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Kanonische Basis

2. Das Rechnen mit Koordinaten

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot b_i$$

$$w = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i$$

$$v + w = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot b_i + \sum_{i=1}^{n} y_i b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i (x_i + y_i)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

55/4 b, c

Kanon. Basis: $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, b_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$o = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots \lambda_n b_n$

I. $\lambda_1 = 0$

II. $\lambda_2 = 0$ $\quad b_1 \dots b_n$ linear unabhängig

N. $\lambda_n = 0$

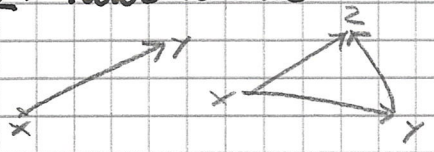
$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\quad v = d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots d_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

I. $a_1 = d_1$

II. $a_2 = d_2$

N. $a_n = d_n$

V. Punktraum



$$\vec{xy} + \vec{yz} = \vec{xz}$$

Definition: V sei ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

P heißt affiner Punktraum über V, wenn gilt:

Jedem geordneten Paar (X, Y) von Punkten aus P wird eindeutig ein Vektor $\vec{XY}$ aus V zugeordnet. Dabei sind die Axiome erfüllt:

1. Zu jedem Punkt $O \in P$ und jedem Vektor $\varphi \in V$ gibt es genau einen Punkt $X \in P$ mit $\vec{OX} = \varphi$
2. Für alle $X, Y, Z \in P$ gilt: $\vec{XY} + \vec{YZ} = \vec{XZ}$

Satz: $\vec{XY} = -\vec{YX}$

Definiton: $\dim P = \dim V$

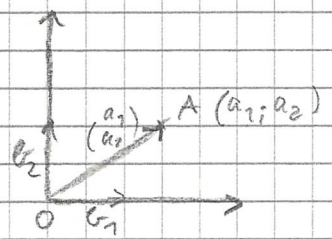
Definition: Wählt man einen festen Punkt $O \in P$, so heißt der Vektor $\vec{OX} = \varphi$ Ortsvektor von X

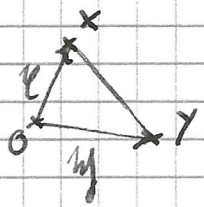
O heißt Ursprung.

Definition: $[O; b_1 \dots b_n]$ heißen affines Koordinatensystem, wenn $O \in P$; $\{b_1 \dots b_n\}$ sind Basis

$$\vec{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A hat Koord. $(a_1; a_2 \dots a_n)$





$$\vec{XY} = \psi - \varphi$$

(Ortsvektor des Endpunktes − Ortsvektor des Anfangsp.)

$X(2;1)$
$Y(7;5)$

$$\vec{XY} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vektorraum der n-Tupel

$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ bilden Basis

Der Vektorraum der n-Tupel hat die Dimension n

Also in Zukunft nur zu zeigen (1) Die gegebenen n Vektoren sind linear unabhängig.

(2) Wenn $\dim V = n$ bekannt ist, folgt für jeden anderen Vektor $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots \lambda_n b_n$

S-Multiplikation

$$\lambda y = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i b_i = \lambda (x_1 b_1 \dots x_n b_n) = \lambda x_1 b_1 \dots \lambda x_n b_n = \begin{pmatrix}\lambda x_1\\\vdots\\\lambda x_n\end{pmatrix}$$

Inverses Element

$$\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-a_1\\\vdots\\-a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

S. 63 | 1

$v = (1, 0, -2), b = (-3, 5, -1)$; $v + b = (-2, 5, -3)$

$v - b = (4, -5, -1)$

63 | 2; 3a, b

2) $v = (2, -3, 5), b = (6, -1, -3), x = \begin{pmatrix}-4\\8\\1\end{pmatrix}$

$v + b + x + y = 0$

$y = -v - b - x = -\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\-1\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\8\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-4\\-3\end{pmatrix}$

3) a) $\begin{pmatrix}-9\\3\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = 4y$

$y = \begin{pmatrix}-9\\1\\7\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} = \begin{pmatrix}-2{,}25\\0{,}25\\1{,}75\end{pmatrix}$

b) $-2y + 5y = -\begin{pmatrix}2\\-5\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\-4\\0\end{pmatrix}$

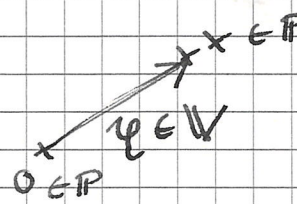
$y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\+1\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\\frac{1}{3}\\-\frac{7}{3}\end{pmatrix}$

Klausur 14.5.86 13.15 Uhr ?

Stoff: ganze analyt. Geometrie, insbesondere Aufgaben zum Vektorraum, Untervektorraum; Basis, Koordinaten, Komponenten; Anwendungsaufgaben zu Ortsvektoren, zur geschlossenen Vektorkette und linearer Unabhängigkeit von geom. Vektoren.

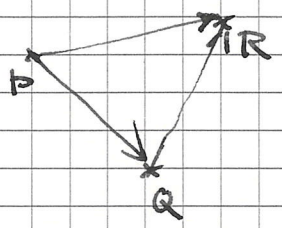
Wiederholung: affiner Punktraum

a)



mit $\overrightarrow{OX} = \varphi$

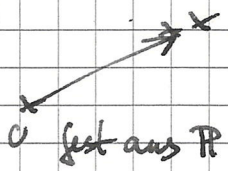
b)



$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

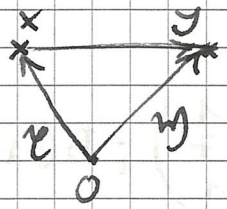
c) $\dim \mathbb{P} = \dim \mathbb{V}$

d)



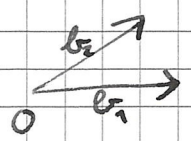
$\overrightarrow{OX}$ ist Ortsvektor von X

e)



$\overrightarrow{XY} = \psi - \varphi$

f)

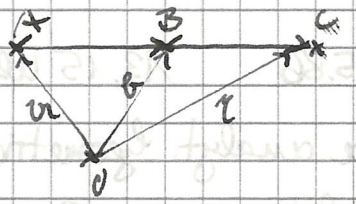


$[O; b_1 \dots b_n]$ affines Koordinatensystem

g) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ Ortsvektor von A

$\Rightarrow A(a_1 \dots a_n)$

103/12 $A(2;3)$; $B(7;-2)$



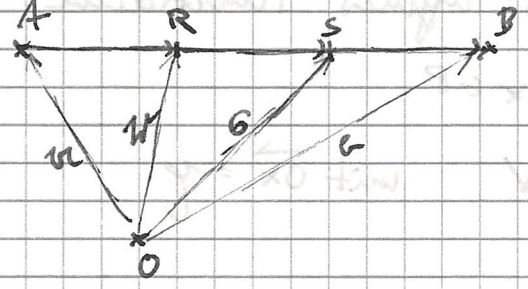
$\vec{AB} = b - u = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$v = b + BC = b + b - u = 2b - u$

$v = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$

$C(12;-7)$

/13 $R(1;2)$; $S(3;4)$



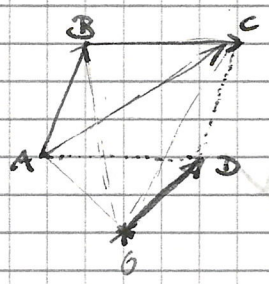
$\vec{RS} = s - w$

$\vec{RS} = \vec{SB} = \vec{AR}$

$b = s + \vec{SB} = s + s - w = 2s - w$; $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$; $B(5;6)$

$u = w - \vec{AR} = w - s + w = 2w - s$; $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $A(-1;0)$

/14 $A(-2|0)$; $B(3|5)$; $C(0|4)$



$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} =$

$= \vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB} =$

$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $D(-5|-1)$

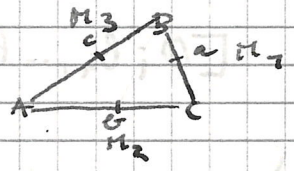
/16 ~~A M B~~ $A(1|3|5)$; $M\ B(0|-2|3)$

~~$\vec{AB} = 2\vec{AM} = 2\vec{OM}$~~

$\vec{OB} = \vec{OM} + \vec{AM} = \vec{OM} + \vec{OM} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 2 - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$; $B(-1|-7|1)$

S. 103/17

$A(0|5|-1)$, $B(3|2|1)$, $C(5|4|4)$



~~a) $\vec{AM_1} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{AC}$~~

a) $\vec{AM_1} = \vec{OM_1} - \vec{OA}$

$\vec{OM_1} = \vec{OC} + \frac{1}{2}\vec{CB} = \vec{OC} + \frac{1}{2}(\vec{OB} - \vec{OC}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2,5 \end{pmatrix}$

$\vec{AM_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3,5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OB}$

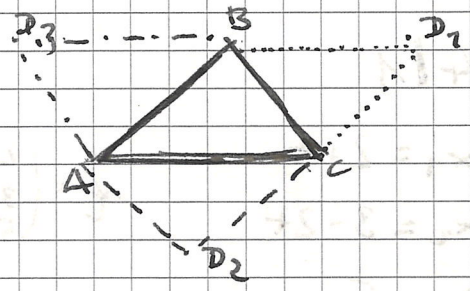
$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \begin{pmatrix}0\\5\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}5\\4\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\5\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2{,}5\\4{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BM_2} = \begin{pmatrix}2{,}5\\4{,}5\\1{,}5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}5\\2{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CM_3} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \begin{pmatrix}0\\5\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\5\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1{,}5\\3{,}5\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CM_3} = \begin{pmatrix}1{,}5\\3{,}5\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3{,}5\\-0{,}5\\-4\end{pmatrix}$



b) ~~$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$~~

~~$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{OA}$~~

$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} =$

$= -\begin{pmatrix}0\\5\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\4\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\1\\6\end{pmatrix}$; $D_1(8|1|6)$

$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} =$

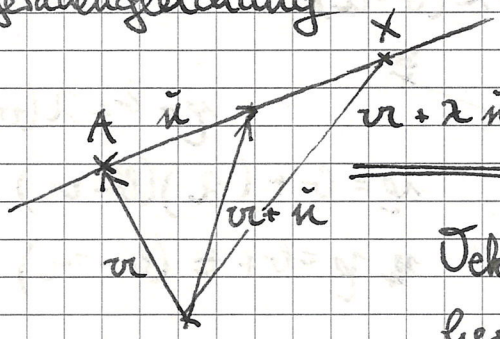
$= \begin{pmatrix}0\\5\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\7\\2\end{pmatrix}$; $D_2(2|7|2)$

$\overrightarrow{OD_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} =$

$= \begin{pmatrix}0\\5\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}$; $D_3(-2|3|-4)$

VI. Gerade und Ebene im $\mathbb{R}^3$

1. Geradengleichung



$\vec{v} + \lambda\vec{u} = \vec{x}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

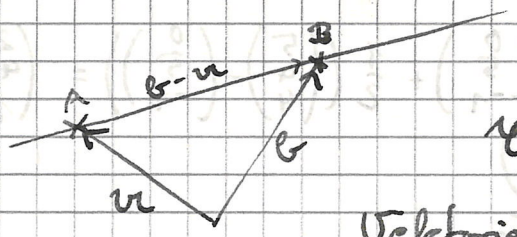
Vektorielle Punkt-Richtungs-Form der Geradengleichung. λ heißt Parameter.

Koordinatenschreibweise:

$x_1 = a_1 + \lambda u_1$

$x_2 = a_2 + \lambda u_2$

$x_3 = a_3 + \lambda u_3$



$x = a + \lambda(b-a)\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}$

Vektorielle Zwei-Punkte-Form der Geradengleichung.

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda(b_1 - a_1) \\ x_2 &= a_2 + \lambda(b_2 - a_2) \\ x_3 &= a_3 + \lambda(b_2 - a_2) \end{aligned}$$

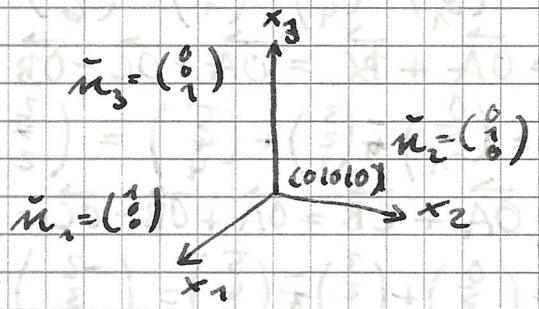
114/1

$$\begin{aligned} x_1 &= 2+t \\ x_2 &= 3-2t \\ x_3 &= 5 \end{aligned} \qquad x = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\ ;\ \vec{u} = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

/2

$A(1|2|1)\ ;\ \vec{u} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$



(ad 3.)

/3

$x_1 = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$x_2 = \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad x_3 = \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

115/8 a)

$A(2|-5|1),\ O(0|0|0)$

~~$x = \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}\lambda$~~ $\left[x = \lambda\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}\right]$

$x = \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\5\\-1\end{pmatrix}$

b) $R(2|-2|-2)\ ;\ S(1|2|0)$

$x = \vec{r} + \lambda(\vec{s} - \vec{r})$

$x = \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}$

---

3) $x = a + \lambda(b-a)$



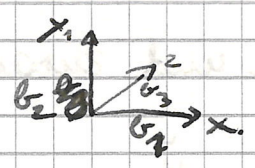
$x = b + \lambda(a-b)$

$x = b + (-\lambda)(b-a)$

$\rightarrow x = b + t(b-a)$

114/a, b, c; 6

114/4a)



$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \vec{b_1} + 5\lambda \vec{b_1}$ $\Rightarrow$ liegt auf x-Achse

4b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \vec{b_2} - \lambda \vec{b_3}$ $\Rightarrow$ parallel z-Achse, Abstand 1

4c) $\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \lambda \vec{b_1} + \lambda \vec{b_2} + \vec{b_3}$

$\Rightarrow$ bildet Raumdiagonale durch Ursprung

6) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$P_1(1|0|3), P_2(2|2|-3), P_3(7|6|-6), P_4(3|0|0)$

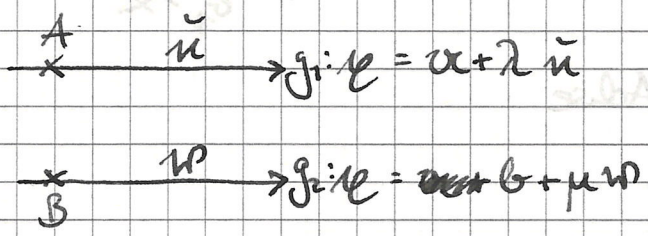
$\left.\begin{aligned} 1 &= 1+2\lambda \\ 0 &= 2\lambda \\ 3 &= 3-3\lambda \end{aligned}\right\} \lambda = 0 \Rightarrow P_1 \in g$

$\left.\begin{aligned} 2 &= 1+2\lambda \\ 2 &= 0+2\lambda \\ -3 &= 3-3\lambda \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow \lambda = \tfrac{1}{2} \\ &\Rightarrow \lambda = 1 \end{aligned} \Rightarrow P_2 \notin g$

$\left.\begin{aligned} 7 &= 1+2\lambda \\ 6 &= 0+2\lambda \\ -6 &= 3-3\lambda \end{aligned}\right\} \lambda = 3 \Rightarrow P_3 \in g$

$\left.\begin{aligned} 3 &= 1+2\lambda \\ 0 &= 0+2\lambda \\ 0 &= 3k-3\lambda \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow \lambda = 1 \\ &\Rightarrow \lambda = 0 \end{aligned} \Rightarrow P_4 \notin g$

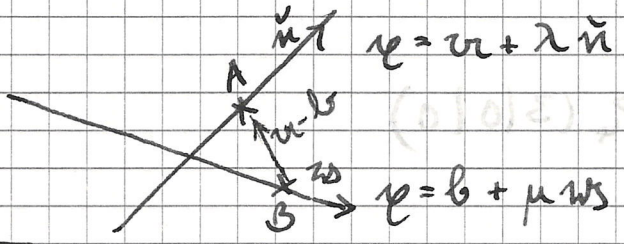
Parallele und zusammenfallende Gerade 1.3.



$g_1 \parallel g_2 \iff \vec{u} \parallel \vec{w} \iff \{\vec{u}, \vec{w}\}$ linear abhängig

$g_1 = g_2 \iff \{\vec{u}, \vec{w}\}$ linear abhängig und $B \in g_1$

1.4. Sich schneidende und windschiefe Geraden



g_1 und g_2 haben Schnittpunkt $\iff$ $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ linear unabhängig und $\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{a}-\vec{b}\}$ linear abhängig

g_1 und g_2 sind windschief $\iff$ $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ linear unabhängig und $\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{a}-\vec{b}\}$ linear unabhängig

<u>Beispiel</u>: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$g_1 \nparallel g_2 \quad \lambda_1 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \vec{0}$

1. $\mu = 0 \quad \Rightarrow \mu = 0$
2. $\lambda + \mu = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 0$
3. $\lambda + 2\mu = 0$

$\Rightarrow \vec{u}, \vec{w}$ linear unabhängig

Berechnung des Schnittpunktes

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

I $1 = \mu$ $\quad \mu = 1$

II $\lambda = 1 + \mu$ $\quad \lambda = 2$

III $1 = 2\mu$ $\quad 2 = 2 \cdot 1$ (w)

also g_1 schneidet g_2

Berechnung: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ $\quad S(1|2|2)$

115/14 · 116/21a

14) $e = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$; $e = \begin{pmatrix}-4\\7\\-4\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-6\\6\\-4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\7\\-4\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-6\\6\\4\end{pmatrix}$

$\lambda \begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix}-6\\6\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\6\\4\end{pmatrix}$

I. $3\lambda + 6\mu = -6$; $\lambda = -2 - 2\mu$ $\quad 3\lambda + 3\lambda + 6 = -6$; $6\lambda = -12$

II. $-3\lambda - 6\mu = 6$; $-3(-2-2\mu) - 6\mu = 6$ $\quad \lambda = -2$

$6 + 6\mu - 6\mu = 6$ $\quad \mu = 0$

III $2\lambda - 4\mu = -4$; $2\mu = \lambda + 2$; $\mu = \frac{1}{2}\lambda + 1$

21a) $g: e = \begin{pmatrix}-7\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$; $h: e = \begin{pmatrix}1\\-8\\-1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\2\\-6\end{pmatrix}$

$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\2\\-6\end{pmatrix} = 0$

I. $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$; $\lambda_1 = -2\lambda_2$

II. $-3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$; $6\lambda + 2\lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

III $\lambda_1 - 6\lambda_2 = 0$ $\quad \Rightarrow$ g, h linear unabhängig

$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}-7-1\\2+8\\1+1\end{pmatrix} = 0$

I. $\lambda_1 - 8\lambda_2 = 0$; $\lambda_1 = 8\lambda_2$

II. $-3\lambda_1 + 10\lambda_2 = 0$;

III. $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$; $\quad \Rightarrow$ g, h windschief

14) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ (s.o.)

1.5 Koordinatenform der Geradengleichung im $\mathbb{R}^2$

a) Darstellung der Geraden in vektorieller Parameterform

Punkt-Richtungsform $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$

2 Punkte-Form $\vec{x} = \vec{a} + \lambda (\vec{b} - \vec{a})$

b) Darstellung mit Parametern in Koordinaten

Punkt-Richtungsform $x_1 = a_1 + \lambda u_1$; $x_2 = a_2 + \lambda u_2$

2 Punkte-Form $x_1 = a_1 + \lambda (b_1 - a_1)$; $x_2 = a_2 + \lambda (b_2 - a_2)$

c) Darstellung ohne Parameter in Koordinaten (nur im $\mathbb{R}^2$ üblich)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 - a_1 = \lambda u_1 \\ \text{II} & x_2 - a_2 = \lambda u_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x_2 - a_2}{x_1 - a_1} = \frac{u_2}{u_1}$$

(remember: $\frac{y - a_2}{x - a_1} = m$; $m = \frac{u_2}{u_1}$)

oder $\frac{x_2 - a_2}{x_1 - a_1} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ $\left(m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}\right)$

Explizite Form:

$$x_2 - a_2 = (x_1 - a_1) \frac{u_2}{u_1}$$

$$x_2 = a_2 + \frac{u_2}{u_1} x_1 - a_1 \frac{u_2}{u_1}$$

$$x_2 = \frac{u_2}{u_1} x_1 + a_2 - a_1 \frac{u_2}{u_1}$$ (remember: $y = mx + t$)

Beispiel: $A(-3|1)$, $B(3|-2)$

a) Parameterdarstellung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$ Vektorgleichung

$x_1 = -3 + \lambda 6$; $x_2 = 1 - \lambda 3$ Parameterdarstellung

b) Darstellung ohne Parameter

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 + 3} = -\frac{3}{6} \; ; \; \frac{x_2 - 1}{x_1 + 3} = -\frac{1}{2}$$

Explizite Form:

$$x_2 = -\frac{1}{2} x_1 + 1 - \frac{3}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2}$$

c) Umformung in Vektorgleichung mit Parameter

$2x_2 = x_1 - 1$

$2x_2 + x_1 + 1 = 0$ (implizierte Form)

Wähle $x_2 = \lambda$

$x_1 = -1 - 2\lambda$ } Koordinatendarstellung mit Parameter

$\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ } Vektorgleichung mit Parameter

Nachweis, daß $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ gleich $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

Richtungsvektoren parallel:

$\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ linear abhängig

$(-1,0) \in g: \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$

I. $-1 = -3 + \lambda 6 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$

II. $0 = 1 - 3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow (-1,0) \in g$

Beispiel zum Schnitt zweier Geraden

a) mit Parameter

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

I. $1 + 2\lambda = 1 + \mu$; $2\lambda = \mu$ $\quad \mu = -2$

II. $\lambda = 1 + \mu \Leftrightarrow \lambda = 1 + 2\lambda$; $-\lambda = -1$ ⇑

Schnittpunkt: $S = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + -1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

oder $S = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

b) ohne Parameter

$g: x_1 = 1 + 2\lambda$; $x_2 = \lambda$ } $\Rightarrow \frac{x_2}{x_1 - 1} = \frac{\lambda}{2\lambda} = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 - 1)$

$h: x_1 = 1 + \mu$; $x_2 = 1 + \mu$ } $x_2 = x_1$

I. $2x_2 - x_1 + 1 = 0$ $\qquad$ II $x_2 = x_1$

$2x_1 - x_1 + 1 = 0 \quad ; x_1 = -1$

$x_2 = -1$

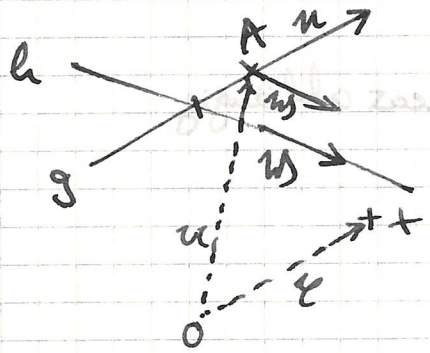
$S(-1|-1)$

2. Ebene- und Ebenengleichungen

Eine Ebene ist festgelegt:

1. 3 Punkte
2. 2 sich schneidende Geraden
3. 2 parallele Geraden
4. Gerade und ein Punkt außerhalb der Geraden

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

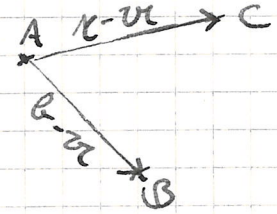


Punkt-Richtungsform der Ebene

$\vec{AX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

3-Punkte-Form



$$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda (\vec{x} - \vec{a}) + \mu (\vec{b} - \vec{a})$$

$7 = 2 + 3\lambda_1 + \lambda_2 + z_1$

$-1 = 1 + 5\lambda_1 + 2\lambda_2 + z_2$

$5 = 7 + 5\lambda_2 + z_3$ ✓

$z_3 = -2 - 5\lambda_2$

$5\lambda_2 = -z_3 - 2$

$\lambda_2 = \frac{-z_3}{5} - \frac{2}{5}$

$2 + 3\lambda_1 = -9 + \lambda_2$

$1 + 5\lambda_1 = 8 + \lambda_2$

$7 = 13 + 5\lambda_2$

$5\lambda_2 = 6$

$\lambda_2 = \frac{6}{5}$

$1 + 5\lambda_1 = 8 + \frac{6}{5}$

$\lambda_1 = 7 + \frac{6}{5} \quad | : 5$

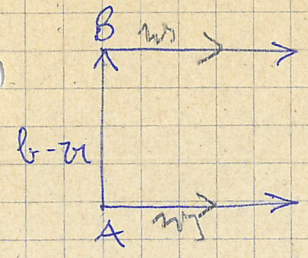
$\lambda_1 = \frac{41}{25}$

$2 + \frac{3 \cdot 41}{25} = -9 + \frac{6}{5}$

$\frac{2 \cdot 25 + 3 \cdot 41}{25} = \frac{-45 + 6}{5}$

$50 + 123 = 5(6 - 45)$

3. Zwei parallele Geraden



$g_1 = a + \lambda w$

$g_2 = b + \mu w$

$$\boxed{\varphi = a + \lambda w + \mu (b - a)}$$

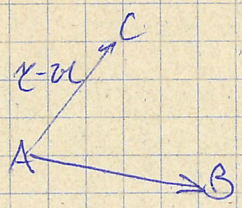
$$\varphi = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}-3-2\\8-1\\13-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}-19\\7\\6\end{pmatrix} + 2$$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-9\\8\\13\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}$$

4. Eine Gerade und ein Punkt



$g: x = \vec{a} + \lambda v_1$

$\vec{x} = \vec{a} + \lambda v_1 + \mu (\vec{c} - \vec{a})$

$$\boxed{\varphi = a + \lambda w + \mu (x - a)}$$

S. 128/1

Punkt-Richtungsform: $\varphi = a + \mu u + \lambda w$

$$\varphi = \begin{pmatrix}-2\\1\\7\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}$$

128/3

$$\varphi = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}$$

I. $2 + \lambda - 2\mu = 1$

II. $\lambda + 3\mu = 4 \Rightarrow \lambda = 4 - 3\mu$ in I. $2 + 4 - 3\mu - 2\mu = 1$

III. $3 + \lambda + 2\mu = 6$

$6 - 5\mu = 0 \; ; \; 5 = 5\mu \; ; \; \mu = 1$

in II.: $\lambda = 4 - 3 = 1$

in III.: $3 + 1 + 2 = 6$ (w)

A liegt in der Ebene.

$B = \begin{pmatrix}3\\-7\\0\end{pmatrix}$

I. $2 + \lambda - 2\mu = 3$ $\qquad 2 + \lambda + 20 = 3 \; ; \; \lambda = -19$

II. $\lambda + 3\mu = -7$ $\qquad 3 - 2\mu + 3\mu = -7 \; ; \; \mu = -10$

III. $3 + \lambda + 2\mu = 0 \Rightarrow \lambda = 3 - 2\mu$

$3 - 19 - 20 = 0$ (f)

B liegt nicht in der Ebene.

128|4)

$\varphi = \mathfrak{a} + \lambda(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) + \mu(\mathfrak{c} - \mathfrak{a})$; ~~$\varphi = \begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\-7\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix} + \mu($~~

10) $g: \varphi = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\-2\\8\end{pmatrix}$; $h: \varphi = \begin{pmatrix}14\\-8\\17\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\-2\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\-8\\17\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$

$\lambda = 2$ $\qquad \mu = -1$

129|10a, b, 11

10 b) $\varphi = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + \lambda_1\begin{pmatrix}5\\-2\\8\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$

11) $\varphi = \begin{pmatrix}7\\-1\\5\end{pmatrix} + \lambda_1\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$

2.4. Parallele und zusammenfallende Ebenen

$E: \varphi = \mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{u} + \mu\mathfrak{w}$

$F: \varphi = \mathfrak{b} + \sigma\mathfrak{u}_1 + \tau\mathfrak{w}_1$

a) E und F sind parallel, wenn gilt:

$\{\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}, \mathfrak{w}\}$ sind linear abhängig

und $\{\mathfrak{w}_1, \mathfrak{u}, \mathfrak{w}\}$ sind linear abhängig

b) E und F fallen zusammen: α) sie sind parallel

β) $B \in E$

2.5. Sich schneidende Ebenen

Zwei nicht parallele Ebenen schneiden sich stets in einer Geraden

$E: \varphi = \mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{u} + \mu\mathfrak{w}$

$F: \varphi = \mathfrak{b} + \sigma\mathfrak{u}_1 + \tau\mathfrak{w}_1$

Man bestimme die Schnittpunkte P und Q von zwei Geraden in E mit F!

Mit F und hat man 2 Punkte der Schnittgeraden $\varphi = \vec{p} + \lambda(\vec{q} - \vec{p})$

Falls eine Gerade keinen Schnittpunkt hat, ist sie parallel zur Schnittgeraden und man hat den Richtungsvektor.

2.6 Schnitt von Gerade und Ebene

2.7. Beispiel zum Schnitt von zwei Ebenen

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$$

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}-3\\-4\\5\end{pmatrix}$$

$g_1 \in E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

$g_2 \in E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$

$g_1 \cap E_2$

$$\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}-3\\-4\\5\end{pmatrix}$$

$2 + \lambda = 4\sigma - 3\tau$

$2\lambda = 5 - \sigma - 4\tau \Rightarrow \lambda = \frac{5}{2} - \frac{\sigma}{2} - 2\tau$

$4 + 5 - 6\sigma = 8\sigma$

$9\sigma = 9$

$\sigma = 1$

$0 = 5\tau \Rightarrow \tau = 0$

$\lambda = 2$

222

$P\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}$

$g_2 \cap E_2$

$$\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}-3\\-4\\5\end{pmatrix}$$

I. $2 - \mu = 4\sigma - 3\tau$

II $0 = 5 - \sigma - 4\tau \Rightarrow \sigma = 5 - 4\tau$

III. $5\mu = 5\tau \Rightarrow \mu = \tau$

$\Rightarrow 2 - \tau = 20 - 16\tau - 3\tau$

$18 = 18\tau$

$\tau = 1$

$\mu = 1$

$\sigma = 1$

PQ: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda(\vec{q} - \vec{p})$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\-4\\5\end{pmatrix}$$

$Q\begin{pmatrix}-1\\0\\+5\end{pmatrix}$

Koordinatenform der Ebenengleichung

Bsp.: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Koordinatengleichung mit Parameter

$x_1 = 2 + 2s$

$x_2 = 1 + t$

$x_3 = 3 + s + t$

aus I $\frac{x_1 - 2}{2} = s$

aus II $x_2 - 1 = t$

in III $x_3 = 3 + \frac{x_1 - 2}{2} + x_2 - 1$

$2x_3 = 2 + x_1 + 2x_2$

$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$

Normalenform der Ebenengleichung

Feuerbach, ~~Freud~~, ~~Marx~~, Camus, ~~Sartre~~, ~~Bonhoeffer~~

12/2 Schuljahr 1985/86

Grundkurs k_{12}: Klausur am 11. 6. 1986

mystisch. med. Trans.

Angst, Sinnlos, Einsam.

1. "Ich möchte von Gott nicht an den Grenzen, sondern in der Mitte, nicht in den Schwächen, sondern in der Kraft, nicht also bei Tod und Schuld, sondern im Leben und im Guten des Menschen sprechen." (Bonhoeffer)

Wie lautet der in diesem Satz enthaltene Vorwurf für den Bereich der Gotteserfahrung? Nehmen Sie dazu kurz Stellung und verdeutlichen Sie durch Beispiele! 20

2. "Wenn wir heute Menschen zur Einsicht in die letzte Wirklichkeit verhelfen wollen, auf die es allein ankommt, dann werden wir wohl oder übel alle Gottesbilder über Bord werfen müssen". (Robinson)

Nehmen Sie zu dieser Forderung Stellung und legen Sie dabei auch die Problematik des Gottesbildes dar! 20

3. Ordnen Sie die folgenden Zitate den jeweiligen Religionskritikern zu!

a) "Die Aufhebung der Religion als des illusorischen Glücks des Volkes ist die Forderung seines wirklichen Glücks." Marx

b) "Der notwendige Wendepunkt der Geschichte ist daher dieses offene Bekenntnis und Eingeständnis, ... daß der Mensch kein anderes Wesen als absolutes, als göttliches Wesen denken, ahnen, vorstellen, fühlen, glauben, wollen, lieben und verehren kann als das menschliche Wesen."

c) "... macht der Mensch die Naturkräfte nicht einfach zu Menschen, mit denen er wie mit seinesgleichen verkehren kann, das würde auch dem überwältigenden Eindruck nicht gerecht werden, den er von ihnen hat, sondern er gibt ihnen Vatercharakter, macht sie zu Göttern". Freud

d) "Der Mensch ist verurteilt, frei zu sein. Verurteilt, weil er sich nicht selbst erschaffen hat, anderweit aber dennoch frei, da er, einmal in die Welt geworfen, für alles verantwortlich ist, was er tut." Sartre

e) "Der Mensch vergegenständlicht in der Religion sein eigenes geheimes Wesen." Feuerb. 10

4. "Die legitimen Motive der Religionskritiker sollten aus heutiger Sicht verstanden werden als Aufforderung zur Läuterung der christlichen Religion."
(Grundwissen Religion, Kösel 1984, S. 24)

Erklären Sie dieses Zitat allgemein und im Hinblick auf den Atheismus bei Jeam Paul Sartre! 30

80

Kontakt ~~Relation~~ Objekt.
angewies
Hilfe
Jesus

Rohpunkte	0-20	21-32	33-44	45-56	57-68	69-80
Umrechnung auf 15 Verrechnungspunkte	0-20=0	21-24=1 25-28=2 29-32=3	33-36=4 37-40=5 41-44=6	45-48=7 49-52=8 53-56=9	57-60=10 61-64=11 65-68=12	69-72=13 73-76=14 77-80=15
Noten	6	5	4	3	2	1

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}6\\1\\k\end{pmatrix}$$

I $4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0$

$2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$

II $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$

$\lambda_1 = -\lambda_3$

III $3\lambda_2 + k\lambda_3 = 0$

$9\lambda_3 + k\lambda_3 = 0$

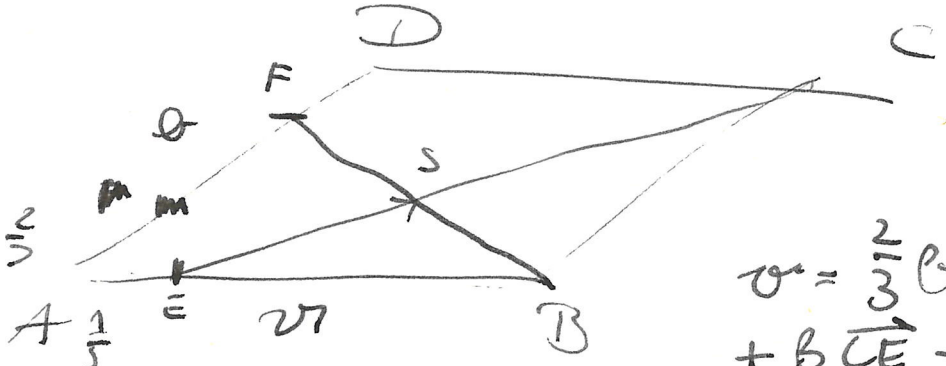
$(9+k)\lambda_3 = 0$

$-6\lambda_3 + 3\lambda_3 + \lambda_2 = 0$

$\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0$

$\lambda_2 = 3\lambda_3$

$k = -9$



$v = \frac{2}{3}b + \alpha\overrightarrow{FB}$

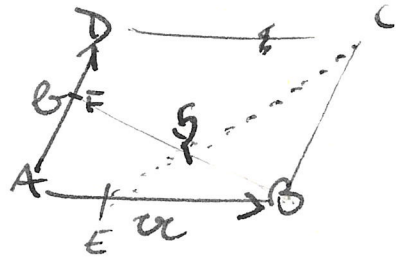
$+ \beta\overrightarrow{CE} - \frac{1}{5}v$

ESBE $v\cdot(\quad) + b(\quad) = v$

$\frac{11}{85}$ $\alpha\overrightarrow{EC} + \beta\overrightarrow{BF} = -\frac{4}{5}\vec{a}$

I.

II.



$\overrightarrow{ES} = \frac{11}{85}\overrightarrow{EC}$

$\frac{\overrightarrow{ES}}{\overrightarrow{SC}} = \frac{\frac{11}{85}\overrightarrow{EC}}{\overrightarrow{EC} - \frac{11}{85}\overrightarrow{EC}}$ $\frac{11}{85}$

$1 - \frac{11}{85}$

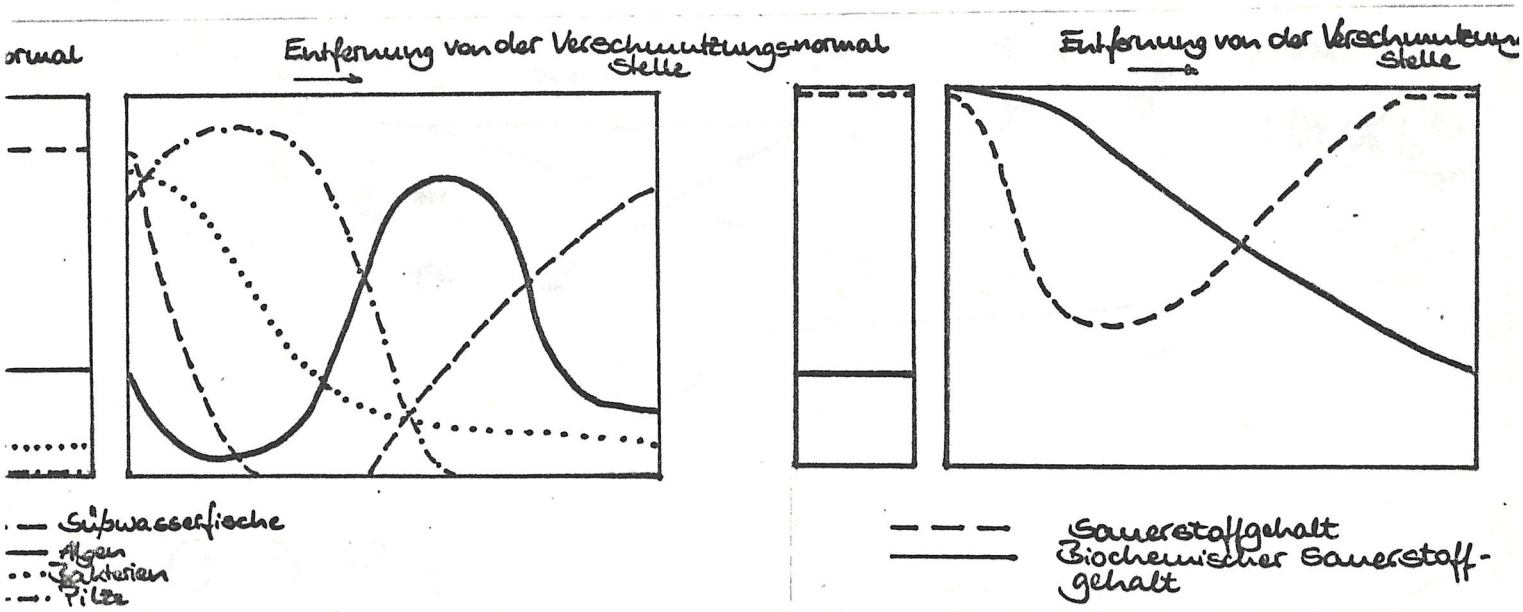
WASSERVERSCHMUTZUNG

Einteilung der Schadstoffe in 5 Belastungsgruppen:
1. leicht abbaubare Stoffe, bakteriell zersetzbar (Haushaltsabwässer)
2. organische, halogenierte Verbindungen (industrielle Abwässer)
3. Salze
4. hochgiftige Schwermetallverbindungen
5. Wärme aus Kühlwasserleitungen

Wassergüteklassen:
Feststellung durch Leitorganismen, biochemischen Sauerstoffbedarf (Bedarf der Bakterien), chemischen Sauerstoffbedarf (Messung der Sauerstoffmenge, die dem Gewässer entzogen wird)

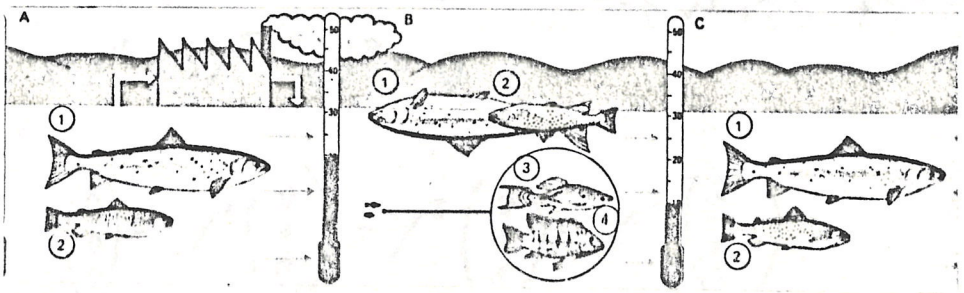
1. fehlende/ geringe Verschmutzung
2. mäßige Verschmutzung
3. starke Verschmutzung
4. übermäßige Verschmutzung

Selbstreinigung des Wassers:
-starke Bakterienvermehrung an der Einlaßstelle
-Sauerstoffzehrung; Aufbau von Phosphor
-erhöhter Algenbestand
-in größerer Entfernung: Normalisierung der Wasserverhältnisse



Überreiches Nährstoffangebot durch phosphorhaltige Haushaltsabwässer:
-Bakterien bauen noch mehr Schadstoffe ab
-Algenblüte, Wasserpflanzen gehen ein
-Absterben der Algen: Bakterien entziehen den übrigen Lebewesen den Sauerstoff
---> Gewässer "kippt um"

Aufheizen eines Gewässers:
-Abbauvorgänge laufen schneller ab
-Sauerstoff löst sich in warmem Wasser nicht
---> Sauerstoffmangel



Erwärmtes Wasser aus den Kühlsystemen von Fabriken und Kraftwerken wird den Flüssen wieder zugeleitet; dadurch steigt die Temperatur der Flüsse, schätzte Arten nehmen seinen Platz ein, z. B. Arten von Zahnkarpfen und Buntbarschen, die die veränderten Bedingungen vertragen. [A]: Im Oberlauf des Wasser bis zu 21 °C, nur »unerwünschte« Fischarten gedeihen. [C]: Flußabwärts normalisieren sich Wassertemperatur und Fischpopulation wieder. gleichzeitig sinkt der Sauerstoffgehalt. Der ursprüngliche Fischbestand (so Forellen [1] und Lachs [2]) kann sich nicht mehr behaupten. Andere, weniger ge- Flusses ist noch der ursprüngliche Fischbestand erhalten, die Wassertemperatur beträgt etwa 5 °C. [B]: Bei Verwendung zu Kühlzwecken erwärmt sich das

A1a) $v = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

(1) v, b, x linear unabhängig

(2) jedes beliebige Vektor ist Linearkombination

wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ folgt, daß jedes 4. Vektor mit v, b, x linearabhängig, also Linearkombination ist.

aus (1) und (2) folgt $\{v, b, x\}$ ist Basis

A1b) $\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\7\\-3\end{pmatrix}$

I. $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 6$

II. $2\lambda_1 - \lambda_3 = 7$

III. $-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -3$

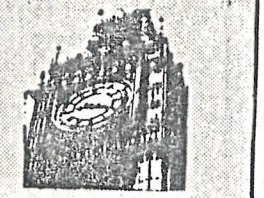
$\lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = -1$

Koordinaten $\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$

Komponenten

c)

PETER HITCHENS' PARLIAMENTARY SKETCHBOOK



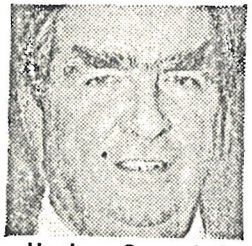
Labour's attack off-target

LABOUR could not use their own most accurate and deadly heavy bomber against Mrs Thatcher yesterday — because Neil Kinnocsk refused him permission to take-off.

The decision to ground Denis Healey was taken for political reasons. He would have been better at the job than Mr Kinnock.

The poor Labour leader had a wretched task trying to attack Mrs Thatcher's support for the United States.

He leads a party which so loathes the U.S.A. that it thinks Colonel Kadhafi is nearly as bad as President Reagan.



Healey: Grounded

Leading party members belonging to the Mineworkers' Union were happy to take Colonel Kadhafi's cash to pay for their strike.

And yesterday Mr Tony Benn accused the Prime Minister of condoning and supporting the deaths of civilians at the hands of the Americans.

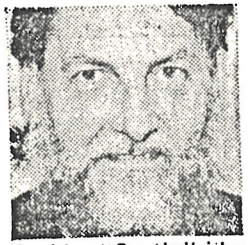
Mrs Thatcher told him: "If one always refuses to take any risks because of the consequences, terrorist Governments will win and one can only cringe before them."

Her points were simple:—

- The Americans defend Europe with 330,000 troops.
- The Americans are the first target of the Kadhafi terror machine.
- The Americans have the right to hit back at their enemies, with their own planes and pilots and from British soil.

Mrs Thatcher clearly felt, but could not say, that there was once a time when Britain might have done the same thing herself.

The bitter humiliation over the murder by Libyans of



Faulds: "Cretin" jibe

WPC Yvonne Fletcher still rankles.

In the face of this, Labour MPs had a contest to see who could be most anti-American.

George Foulkes said Britain was a glorified American aircraft carrier. The comic actor MP Andrew Faulds won the prize by calling the American President "A cretinous cowboy"—later withdrawing the word "cretinous" after a clash with the Speaker.

EXPRESS

OPINION

A vital blow for freedom

LIBYA'S Colonel Kadhafi long ago declared war on the civilised world; and in particular, recently, the United States. Now he is learning what that entails.

Sadly some of his blameless fellow-citizens are reaping the consequences of his wicked folly. However, it has always been true of war formally declared or not that the innocent suffer along with the guilty.

Policewoman Yvonne Fletcher was innocent enough when she was gunned down by one of Kadhafi's murderous oafs in London's St James's Square two years ago tomorrow.

She had no quarrel with Kadhafi, or with Libya. But that did not save her.

Brave Maggie

Nor did it save hundreds of other innocents slaughtered by the terrorism — including the IRA's — that Kadhafi has sponsored and encouraged down the years.

The American action was entirely justified. It was not made any less so because some bombs missed their targets.

The war against Hitler — another international terrorist — was not made any less just because civilians were killed by RAF bombs.

Mrs Thatcher is being assailed by her opponents for giving her blessing to the use of U.S. F1-11 bombers based in Britain.

But the Americans, who gave us invaluable help during the Falklands war, had a right to expect British support.

The Prime Minister need have no fear. She can be proud that she at least had the clarity of mind and strength of purpose to recognise that the time for anguished hand-wringing over Kadhafi's lethal games is past.

She can be assured, too, that most of the British public will applaud her courage and wisdom.

Of course, some people are now busy warning that America's 'cleansing' action will trigger an increase in international terrorism, not a decrease. We shall see.

The Americans say they have evidence that Kadhafi already had terrorist acts coming off the drawing board. It was good enough to convince Mrs Thatcher.

In any event, can anyone doubt that such attacks were planned?

We don't need a crystal ball where Kadhafi is concerned, we have his bloodstained book.

Whatever else it has done, the U.S. military action has put terrorist regimes on notice that they cannot go on killing and maiming with impunity. That is something all the volumes and 'experts' on international law, have failed to do.

We should be grateful for that.

$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$

$E: \vec{x} = \vec{b} + \mu \vec{v} + \upsilon \vec{w}$

Berechnung des Schnittpunkts $\vec{a} + \lambda \vec{u} = \vec{b} + \mu \vec{v} + \upsilon \vec{w}$

Bsp: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \upsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

S. 130 | 20a

20a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

~~$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{x}$~~

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \upsilon_1$; $\vec{x}_2 = \upsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{x}_2 = \upsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

I. $-2 + 3\lambda + 8\mu = 1\upsilon$ $\Rightarrow -2 - 3 = \upsilon$; $\upsilon = -5$

II. $1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

III. $3 + 3\lambda + 5\mu = 0$ $\Rightarrow 3 - 3 + 5\mu = 0$; $\mu = 0$

~~$S_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$~~

I. $-2 + 3\lambda + 8\mu = 0$

II. $1 + \lambda = \upsilon$

III. $3 + 3\lambda + 5\mu = 0$;

$\Rightarrow 3\lambda = -5\mu - 3$

in I: $-2 - 5\mu - 3 + 8\mu = 0$

$3\mu = 5$

$\mu = \frac{5}{3}$

in III: $3\lambda = -\frac{25}{3} - 3$

$\lambda = -\frac{25}{9} - 1 = -\frac{34}{9}$

in II: $1 - \frac{34}{9} = \upsilon$; $\upsilon = -\frac{25}{9}$

$S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{25}{9} \\ 0 \end{pmatrix}$

I. $-2 + 3\lambda + 8\mu = 0$

II. $1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

III. $3 + 3\lambda + 5\mu = \upsilon$

aus I: $-2 - 3 + 8\mu = 0$

$8\mu = 5$

$\mu = \frac{5}{8}$

in III: $3 - 3 + \frac{25}{8} = \upsilon$

$\upsilon = \frac{25}{8}$

$S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{25}{8} \end{pmatrix}$

DIE LIBELLE - EIN RÄUBERISCHES INSEKT

Libellenlarve

- Vorlarvenstadium
- Larvenleben

Die Larve wartet oft stundenlang unbeweglich bis ein Beutetier in Reichweite ist, dann fängt sie es mit Hilfe der Fangmaske (siehe Abbildung)

Nahrung
kleine Wasserflöhe, Eintags- und Köcherfliegenlarven, Kaulquappen

Feinde
Frösche, große Libellenlarven, Fische Parasiten, Schmarotzer

Lebensdauer
wenige Wochen, Monate, sogar Jahre

Fertige Insekt: die Libelle

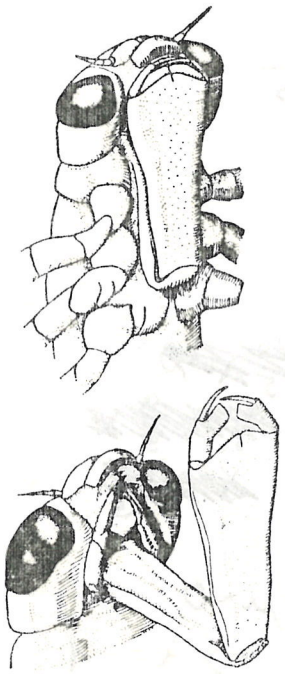
Dreigliederung des Körpers:
Kopf - Brust - Hinterleib
An der Brust die 3 Beinpaare und die beiden Flügelpaare

Kein Knochengerüst, sondern ein Außengerüst aus Chitin

Nahrung
Fliegen, Mücken, kleine Libellen, Schmetterlinge, Wespen

Feinde
Frösche, Fische, Vögel, Parasiten Schmarotzer

Lebensdauer
wenige Wochen bis zu mehreren Monaten.



Fangmaske einer Edellibellen-Larve in Ruhestellung (oben) und ausgeklappt (unten).

Eiablage

- im Flug -- Abwerfen der Eier
  -- Eintauchen des Hinterleibes ins Wasser
- sitzend
- mit Hilfe des Legeapparates in Pflanzen oder in Bachschlamm/-sand

Mengen bis zu 1600 Stück
Entwicklungsdauer: 2-5 Wochen

Die Umwandlung der Larve in die geflügelte Libelle vollzieht sich an Land. Sie ist in 6 Abschnitte unterteilbar (E. Straub).

Die Larve klettert ans Ufer, schlüpft aus der Nymphenhaut, indem sich die erwachsene Libelle aus der Hülle herauswindet und noch eine Weile an ihr hängenbleibt, bis Körper und Flügel gestreckt, erhärtet und völlig getrocknet sind. Erst dann ist das Tier zum Gebrauch seiner Flügel imstande.

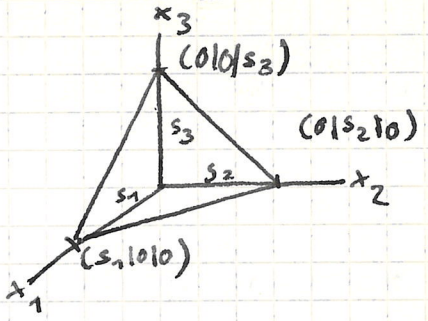
Zeitdauer: ca. 2 1/2 Stunden

Entwicklungsorte: Teiche, Moore, Wasserlachen, Bäche, Flüsse

Hilfsmittel zum Referat: Die L. unserer Heimat (H. Schiemenz)
Grzimeks Tierleben

Verfasserin: S. Zieschang

Darstellung der Ebene in Achsenabschnittsform



$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$

$a_1s_1 + a_20 + a_30 + a_0 = 0$

$s_1 = -\frac{a_0}{a_1}$

$s_2 = -\frac{a_0}{a_2}$

$s_3 = -\frac{a_0}{a_3}$

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = -a_0 \quad | :(-a_0)$

$\frac{a_1x_1}{-a_0} + \frac{a_2x_2}{-a_0} + \frac{a_3x_3}{-a_0} = 1$

$\frac{x_1}{-\frac{a_0}{a_1}} + \frac{x_2}{-\frac{a_0}{a_2}} + \frac{x_3}{-\frac{a_0}{a_3}} = 1$

$$\boxed{\frac{x_1}{s_1} + \frac{x_2}{s_2} + \frac{x_3}{s_3} = 1}$$ Achsenabschnittsform

Bsp.:

$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \quad | :7$

$\frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3 = 1$

$\frac{x_1}{\frac{7}{2}} + \frac{x_2}{\frac{7}{3}} - \frac{x_3}{\frac{7}{1}} = 1 \quad \Rightarrow$ Achsenabschnitte: $\frac{7}{2}, \frac{7}{3}, -7$

S. 131/24

$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$: parallel zu x_1x_3-Ebene

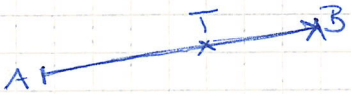
$x_1 = 3 + \lambda \quad \Rightarrow \lambda = x_1 - 3$

$x_2 = 2$

$x_3 = -1 + \mu \quad \Rightarrow \mu = x_3 + 1$

$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$: x_2x_3-Ebene

VII. Teilverhältnis



$\lambda = \frac{\overline{AT}}{\overline{TB}}$

Definition: in der Beziehung $\overrightarrow{AT} = \lambda\overrightarrow{TB}$ heißt λ Teilverhältnis der drei Punkte A, T, B

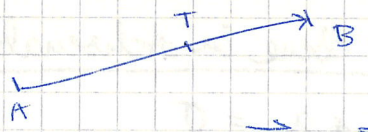
(Abk.: $\lambda = (AB, T)$)

$\lambda > 0$, wenn T zwischen A und B liegt, T_i heißt innerer Teilpunkt

$\lambda < 0$, wenn T außerhalb A, B liegt, T_a heißt äußerer Teilpunkt

1. Grundaufgabe: geg.: A, B, T

ges.: λ



$\vec{AT} = \lambda \vec{TB}$

$t - a = \lambda(b - t)$

Koordinatengleichungen:

$t_1 - a_1 = \lambda(b_1 - t_1)$ $\quad \boxed{\lambda = \frac{t_i - a_i}{b_i - t_i}}$

$t_2 - a_2 = \lambda(b_2 - t_2)$

$t_3 - a_3 = \lambda(b_3 - t_3)$

2. Grund: $\boxed{t = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}}$

142 | 8

$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda = 1$

$t = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

| 10

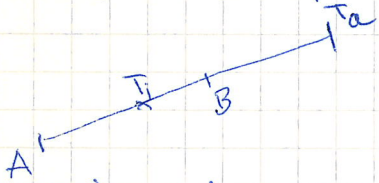
$A(13|10|4), B(3|0|-6), P(6|\overset{y}{\cancel{4}}|\overset{z}{\cancel{2}})$ $\quad$ ges.: $\lambda = (AB, P), y, z$

$\lambda = \frac{6-13}{3-6} = \frac{7}{3}$

$\frac{7}{3} = \frac{t_2 - a_2}{b_2 - t_2}$; $t_2 = y = 3$

; $t_3 = z = -3$

4. harmonische Punkte



HA: 142 | 11, 13 a, b

$\lambda_i = -\lambda_a$

Imperialismus (1880 - 1914)

Streben nach Weltherrschaft, Ausweitung des Machtbereichs

informell | formell

142/11

$A(1|2|1), B(4|-4|-8), P(2|0|-2), X(2,5|-1|3,5)$

$\lambda_i = \frac{t_i - a_i}{b_i - t_i} = \frac{2-1}{4-2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lambda_a = -\lambda_i = -\frac{1}{2}$

$\vec{x} = \frac{\vec{a} + \lambda \vec{b}}{1+\lambda} = 2\left[\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\-4\\-8\end{pmatrix}\right] = \frac{-2}{3}\begin{pmatrix}-2\\8\\10\end{pmatrix}$

$\lambda_i = \frac{t_i - a_i}{b_i - t_i} = \frac{-1-2}{-4+1} = 1$

$\Rightarrow \lambda_a = -\lambda_i = -1$

$\vec{x} = \frac{\vec{a} + \lambda \vec{b}}{1+\lambda}$ → unlösbar, es existiert kein 4. harmonischer Punkt.

13a)

$A(4|8|-3), B(14|3|6), C(y|6|z)$

$\lambda_1 = \frac{6-8}{3-6} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} = \frac{t_1 - 4}{14 - t_1}$; $t_1 - 4 = \frac{28}{3} - \frac{2}{3}t_1$; $\frac{5}{3}t_1 = \frac{40}{3}$; $t_1 = 8 \Rightarrow y = 8$

$\frac{2}{3} = \frac{t_3 + 3}{6 - t_3}$; $t_3 + 3 = \frac{12}{3} - \frac{2}{3}t_3$; $\frac{5}{3}t_3 = -5$; $t_3 = -3 \Rightarrow z = -3$

$C(8|6|-3)$

13b)

$\lambda_i = \frac{2}{3} \Rightarrow \lambda_a = -\frac{2}{3}$

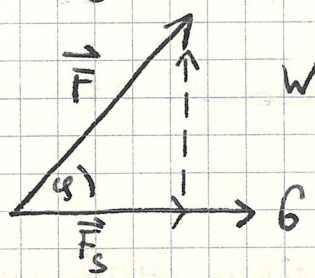
$\vec{x} = \frac{\vec{a} + \lambda \vec{b}}{1+\lambda} = 3\left[\begin{pmatrix}4\\8\\-3\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}14\\3\\6\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}12\\24\\-27\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}14\\3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\18\\-39\end{pmatrix}$

VIII Das Skalarprodukt zweier Vektoren

Beispiel aus der Physik: Arbeit = Kraft × Weg

$\cos\varphi = \frac{|\vec{F_s}|}{|\vec{F}|}$

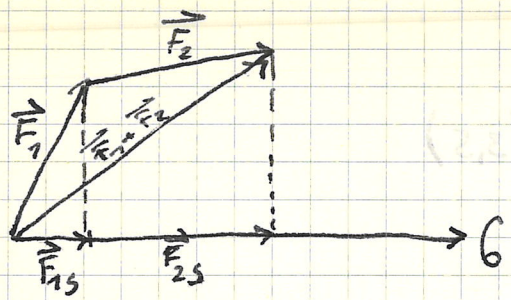
$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$



$W = |\vec{F_s}| \cdot |\vec{b}|$

① $\vec{F} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{F}$

② $\vec{b}(\vec{F_1} + \vec{F_2}) = \vec{b} \cdot \vec{F_1} + \vec{b} \cdot \vec{F_2}$



$$|(\vec{F}_1+\vec{F}_2)_S| = |\vec{F}_{1S}| + |\vec{F}_{2S}| \quad |\cdot|G|$$

$$|(\vec{F}_1+\vec{F}_2)_S|\cdot|G| = |\vec{F}_{1S}|\cdot|G| + |\vec{F}_{2S}|\cdot|G|$$

③ $(r\vec{F})\cdot G = r(\vec{F}\cdot G)$

↳ Def.: Ein Skalarprodukt in einem Vektorraum V ist eine auf $V \times V$ definierte Fkt. $\circ$, die jedem geordneten Paar von Vektoren (v, b) eine reelle Zahl s zuordnet: $s = v \circ b$

Dabei gelten die Axiome

1. $v \circ b = b \circ v$
2. $v(b+x) = v \circ b + v \circ x$
3. $(r \cdot v) \circ b = r \cdot (v \circ b)$
4. $v \circ v > 0$

Darstellung des Skalarprodukts mit Hilfe von Koordinaten

Basis: $\{b_1, \dots b_n\}$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i$$

$$x \circ y = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \circ \sum_{i=1}^{n} y_i b_i$$

Für $n=3$:

$$x \cdot y = (x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3)(y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3) =$$
$$= x_1 y_1 b_1^2 + x_1 y_2 b_1 b_2 + x_1 y_3 b_1 b_3 + \dots$$

Wähle: besonders einfache Basis $b_1^2 = b_2^2 = b_3^2 = 1$, $b_1 b_2 = b_1 b_3 = b_3 b_2 = 0$ } kanonische Basis

b_{ij}, b_j heißen Strukturkonstanten

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

S. 153 | 9

Senkrechte Vektoren: $\varphi = 90°$

$\cos\varphi = 0$

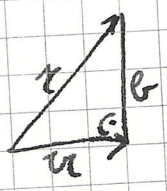
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Lehrsatz: Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ sind orthogonal, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Beispiele:



Vor.: $\vec{a} \perp \vec{b}$

Beweis: $\vec{z} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{z}^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2$

$\vec{z}^2 = \vec{a}^2 + \underbrace{2\vec{a}\vec{b}}_{0} + \vec{b}^2$

$\vec{z}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2$

$|\vec{z}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

$c^2 = a^2 + b^2$

I. Stochastik

§1 Das Zufallsexperiment

Zufallsexperiment: Vorgang, der sich beliebig wiederholen läßt

Versuch: einmalige Durchführung des Experiments

Beispiele:
- Würfeln - einmaliger Wurf
- Ziehen einer Karte - einmaliges Ziehen

Trennung **kausaldeterminierte Experimente** (Versuchsbedingungen $\Rightarrow$ eindeutiges Ergebnis) - **Zufallsexperimente**

Bsp.: physikalische Experimente (Siedepunkt von Wasser)

Zufallsexperiment:

Versuchsbedingungen $\rightrightarrows$ mehrere Versuchsergebnisse

Bsp.: Würfeln $\rightrightarrows$ 1, ..., 6

§2 Ergebnisraum Ω

2.1. Def.: Sind ω_i $(i=1 \dots n)$ die möglichen Versuchsergebnisse eines Zufallsexperiments, so heißt $\Omega = \{\omega_1 \dots \omega_n\}$ der Ergebnisraum des Zufallsexperiments.

[Die möglichen Ergebnisse ω_i $(i=1 \dots n)$ heißen Elemente des Ergebnisraums.] $|\Omega| = n$ (Mächtigkeit)

Beispiel:

1) Würfeln: $\Omega_1 = \{1, 2, \dots 6\}$ $\quad |\Omega_1| = 6$

2) Geschlecht eines Neugeborenen: $\Omega_2 = \{♀, ♂\}$ $\quad |\Omega_2| = 2$

3) 2-maliges Werfen einer Münze hintereinander $\quad |\Omega_3| = 4$

$\Omega_3 = \{(K,K), (K,Z), (Z,K), (Z,Z)\}$

4) Würfeln und dann Münze werfen $\Omega' = \{K, Z\}$

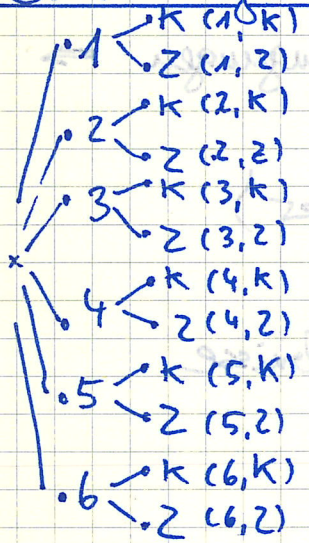
$\Omega_4 = \{(1,K), (1,Z)$
$(2,K), (2,Z)$
$\vdots \quad \vdots$
$(6,K), (6,Z)\}$

aufzählende Form – beschreibende Form

$\Omega_4 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \{1 \dots 6\}, x_2 \in \{K, Z\}\}$

$\Omega_4 = \Omega_1 \times \Omega'$

Baumdiagramm



$\Rightarrow |\Omega_4| = 12 = 6 \cdot 2$

$|\Omega_4| = |\Omega_1| \cdot |\Omega'|$

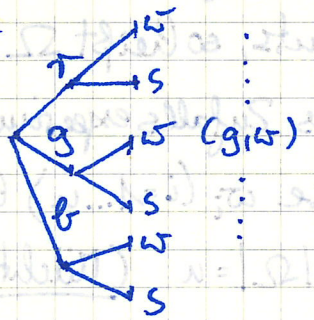
5) Geg.: $U_1 = \{r, g, b\}$ $U_2 = \{w, s\}$

E: Ziehen einer Kugel aus U_1 und dann aus U_2

$\Omega_5 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \{r, g, b\}, x_2 \in \{w, s\}\}$

$\Omega_5 = U_1 \times U_2$

Baum



$|\Omega_5| = 6 = 3 \cdot 2$

$|\Omega_5| = |U_1| \cdot |U_2|$

2.2 Allgemeines Zählprinzip

geg.: $A_1, A_2, \dots A_n$ mit

$|A_i| = k_i$, $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots n$

Dann für:

$A_1 \times A_2 \times \dots A_n = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \mid x_i \in A_i, i = 1 \dots n\}$

$$|A_1 \times A_2 \times \dots A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n| = k_1 \cdot k_2 \cdots k_n$$

§3 Der Ereignisraum

3.1 Def.:

1. Jede Teilmenge des Ergebnisraums Ω heißt Ereignis.
2. Die Menge aller Ereignisse von Ω heißt Ereignisraum $\mathcal{P}(\Omega)$. (Potenzmenge)
3. Das Ereignis A ist eingetreten (nicht eingetreten), wenn das Versuchsergebnis ω ein Element (kein Element) von A ist.

$$\mathcal{P}(\Omega_1) = \{\omega\} \cup \{\}$$
$$\mathcal{P}(\Omega_2) = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \{\omega_1, \omega_2\} \cup \{\}$$
$$\mathcal{P}(\Omega_3) = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \{\omega_3\} \cup \{\omega_1, \omega_2\} \cup \{\omega_1, \omega_3\} \cup \{\omega_2, \omega_3\} \cup \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \cup \{\}$$

$\Omega_1 = \{\omega\}$
$\Omega_2 = \{\omega_1, \omega_2\}$
$\Omega_3 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

Beispiel:

Würfeln: $\Omega = \{1, \dots 6\}$

$A = \{\text{gerade Zahl}\} = \{2, 4, 6\}$

Ergebnis: 4 $\Rightarrow$ A eingetreten, da Ergebnis $\in A$

Ereignis $\{4\}$ (Elementarereignis, da ein Element)

$\{\}$ (unmögliches Ereignis)

Ω (sicheres Ereignis)

$|\Omega| = 6 \Rightarrow |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^6 = 64$

Denn:

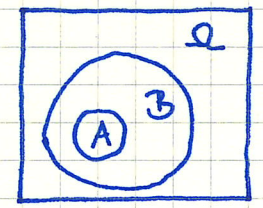
3.2. Satz: $|\Omega| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n \quad n \in \mathbb{N}_0$

(ohne Beweis)

3.3 Relationen zwischen Ereignissen

1. Gleichheit: $A = B \underset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} (\omega \in A \Longleftrightarrow \omega \in B)$

2. Teilmenge: $A \subset B \Leftrightarrow (\omega \in A \Rightarrow \omega \in B)$

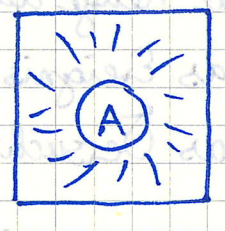


Venn-Diagramm
„A zieht B nach sich"

3. Komplement von A:

$$\bar{A} = \{\omega \mid \omega \notin A, \omega \in \Omega\}$$

„Gegenereignis von A"
„nicht A"



Beispiele:

Würfeln: $\Omega = \{1, \ldots 6\}$

$A = \{2,4,6\}$

$B = \{2,4\}$ („B zieht A nach sich")

$\bar{A} = \{1,5,3\}$

$C = \{\text{Primzahl}\}$

$A \cup C = \{\omega \mid \omega \in A \text{ oder } \omega \in C\} =$

$= \{2,3,4,5,6\}$

$A \cap C = \{\omega \mid \omega \in A \text{ und } \omega \in C\} =$

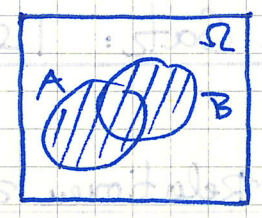
$= \{2\}$

4. Vereinigungsmenge:

$A, B \subset \Omega$

$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \vee \omega \in B\}$

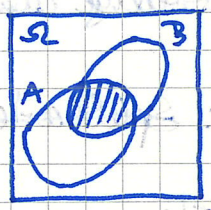
„A oder B (oder beides)"



5. Schnittmenge

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \wedge \omega \in B\}$$

„A und B"



Beispiel:

Würfeln:

$A = \{$ gerade Zahl $\}$

$B = \{3, 5\}$

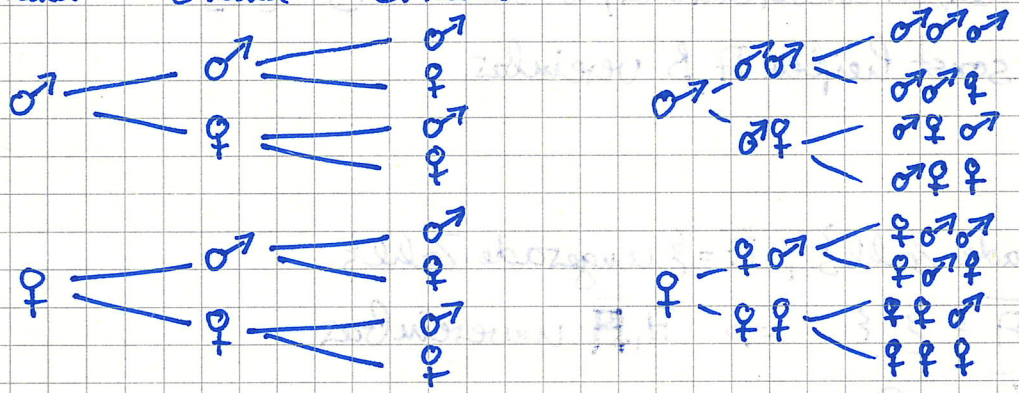
$A \cap B = \{\ \}$

$\overline{B} = \{1, 2, 4, 6\}$

15/3-6

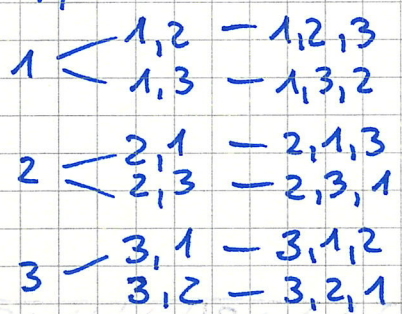
S. 15/3

1. Kind 2. Kind 3. Kind



$$\Omega = \{(♂♂♂), (♂♂♀), (♂♀♂), (♂♀♀), (♀♂♂), (♀♂♀), (♀♀♂), (♀♀♀)\}$$

S. 15/4



$$\Omega = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$$

S. 15|5

Zweistellige Zahlen: $9 \cdot 8 = 72$

Vierstellige Zahlen: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$

~~t.B. Spielkarten As bis 9 werden gezogen~~

S. 15|6

a) $\Omega = \{\{w,w,w\}; \{w,s,s\}; \{w,w,s\}\}$

b) $\Omega = \{(w,w,w); (w,w,s); (w,s,w); (s,w,w); (w,s,s); (s,w,s); (s,s,w)\}$

c) $\Omega = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_i \in \{s,w\}; i = 1...3\}$

3.4 Definition:

$A, B \subseteq \Omega$ heißen unvereinbar, wenn $A \cap B = \{\}$

sonst heißen A, B vereinbar

Beispiel:

Würfeln: $A = \{$gerade Zahl$\}$; $\bar{A} = \{$ungerade Zahl$\}$

$A \cap \bar{A} = \{\} \Rightarrow A, \bar{A}$ unvereinbar

$A \cup \bar{A} = \Omega$

3.5 Zusammenfassung = siehe Buch S. 23

Beispiel:

Würfeln: A: „höchstens 3"

B: „durch 3 teilbar"

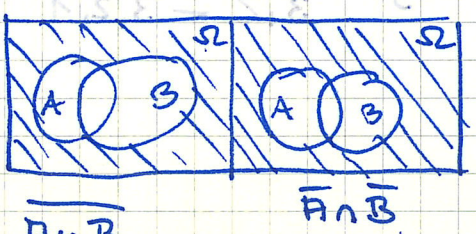
Ergebnismengen: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,6\}$

1) beide Ereignisse treten ein: $A \cap B$

2) mind. ein Ereignis tritt ein: $A \cup B$

3) höchstens ein Ereignis: $\overline{A \cap B}$

4) kein Ereignis: $\overline{A \cup B}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$



S. 19|1 | 24|6-8

S. 19/1

$A = \{\}$ tritt nie ein

$B = \{b, \ddot{u}, n\}$ tritt immer ein

$C = \{b\}$ tritt ein, wenn das Werkstück brauchbar ist

$D = \{\ddot{u}\}$ " " " " " un- " "

$E = \{n\}$ " " " " " nochmals bearbeitet werden muß

$F = \{b, \ddot{u}\}$ " " , wenn Werkstück brauch- oder unbrauchbar ist

$G = \{b, n\}$ tritt ein, wenn Werkstück brauchbar oder zu überarbeiten ist

$H = \{\ddot{u}, n\}$ " " , " " " ün- " " " " " "

S. 24/6

$\Omega = \{1, \dots 6\}$; $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6\}$, $C = \{1,3,5\}$, $D = \{2,4,6\}$

$E = \{1,2\}$, $F = \{3,4\}$, $G = \{5,6\}$

a) A zieht Ω nach sich, B zieht Ω nach sich, C zieht Ω nach sich, D zieht Ω nach sich, E zieht Ω, A nach sich, F zieht Ω nach sich, G zieht Ω, B nach sich

b)

24/7

$|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ 56

$|\bar{A}| = 4$ [illegible] $(6,6,5), (6,5,6), (5,6,6), (6,6,6)$ 2

$|A| = |\Omega| - |\bar{A}| = 212$

uns da unvereinbar

24/8

$|\Omega| =$ [illegible] $= 24 + 23 + 22 + \dots 2 + 1 + 0 = 300 = 25 \cdot 24 : 2$ | 600

A: {mindestens ein Vokal}

$|A| =$ [illegible] $= 24 + 23 + 22 + 21 + 20 = 110$ | 120

$|\bar{A}| =$ [illegible] $= 19 + 18 + 17 + \dots + 1 + 0 = 190 = 20 \cdot 19 : 2$ | 380

5. genau ein Ereignis tritt ein $(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$
(xor)

19/2,3

2) $A = \{(5;5), (6;4), (4;6)\}$

$B = \{(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (2;1), (2;2), (2;3), (3;2), (3;1), (4;1)\}$

$C = \{(1;3), (1;5), (1;1), (2;2), (2;4), (2;6), (3;1), (3;3), (3;5), (4;2), (4;4), (4;6), (5;1), (5;3), (5;5), (6;2), (6;4), (6;6)\}$

$D = \{(5;5), (6;4), (4;6), (1;6), (6;1), (2;5), (5;2), (3;4), (4;3)\}$

$E = \{(2;1), (3;2), (3;1), (4;2), (4;3), (5;4), (5;3), (6;5), (6;4)\}$ Paare andersherum

$F = \{(6;6)\}$

$G = \{\}$; $H = \{1, 2, \ldots 6\}^2 = \Omega$

3) $A = \{(K,K,ZZ), (KZKZ), (KZZK), (ZKKZ), (ZKZK), (ZZKK)\}$

$B = A \cup \{(K,K,KK), (KKKZ), (KKZK), (KZKK), (ZKKK)\}$

$C = A \cup \{(KZZZ), (ZKZZ), (ZZKZ), (ZZZK), (ZZZZ)\}$

3.6 De Morgansche Regeln

$A, B \subset \Omega$

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Beweis siehe HA

§4 Relative Häufigkeit

Experiment: Münze werfen

$\Omega = \{K, Z\}$

$A = \{K\}$

n: Anzahl der durchgeführten Versuche

z: Anzahl des Eintretens von A (absolute Häufigkeit)

4.1 Definition:

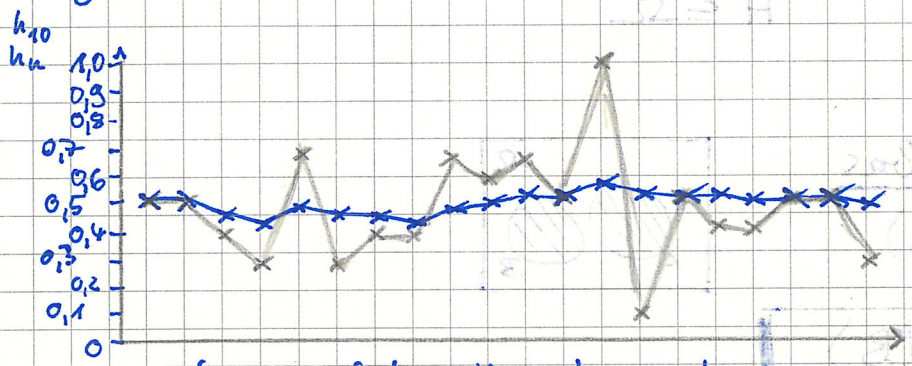
z: absolute Häufigkeit von A

$h_n(A) = \frac{z}{n}$: relative Häufigkeit von A

Tabelle:

n:	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
$z(A)$	5	10	14	17	24	27	31	35	42	48	55	60	70	71	76	80	84	89	94	97
$h_{10}(A)$	0,5	0,5	0,4	0,3	0,7	0,3	0,4	0,4	0,7	0,6	0,7	0,5	1,0	0,1	0,5	0,4	0,4	0,5	0,5	0,3
$h_n(A)$	0,5	0,5	0,46	0,425	0,48	0,45	0,44	0,43	0,46	0,48	0,5	0,5	0,53	0,51	0,506	0,5	0,49	0,43	0,495	0,485

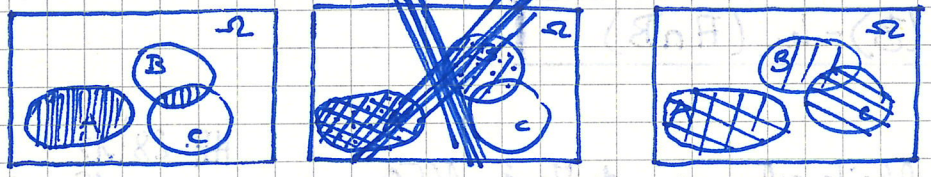
Diagramm:



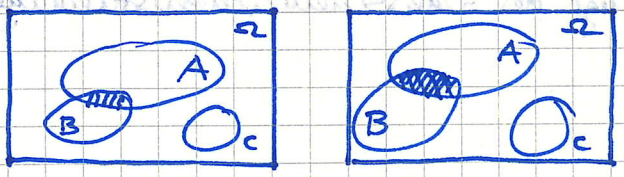
keine Konvergenz

Diagramme für Distributiv-, Absorptionsgesetze:

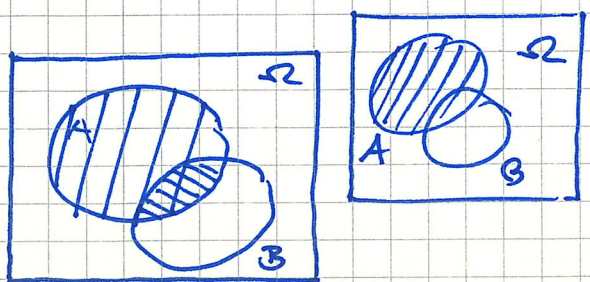
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



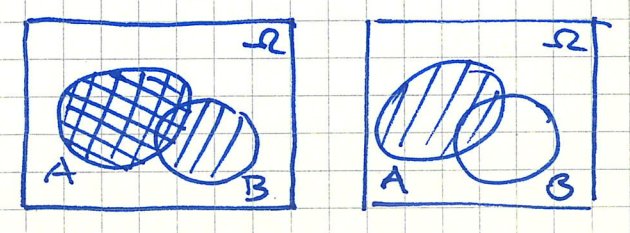
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



$A \cup (A \cap B) = A$



$A \cap (A \cup B) = A$



4.2 Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Bei wachsender Anzahl der durchgeführten Versuche stabilisiert sich die relative Häufigkeit

4.3 Eigenschaften der relativen Häufigkeit



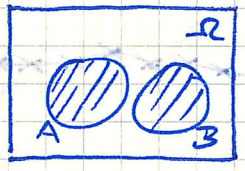
evtl. Klausur

n Versuche $\quad z \in \{0, \dots n\}$

1. $h_n(\Omega) = 1 \quad / \quad z(\Omega) = n$
2. $h_n(\emptyset) = 0 \quad / \quad z(\emptyset) = 0$
3. $0 \leq h_n(A) \leq 1 \qquad A \subseteq \Omega$

   $z \in \{0, \dots n\}$
4. $A, B \subseteq \Omega \quad A, B$ unvereinbar

   $z(A \cup B) = z(A) + z(B)$



$$\Rightarrow h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)$$

5. $A, B \subseteq \Omega$ beliebig

   $z(A \cup B) = z(A) + z(B) - z(A \cap B)$

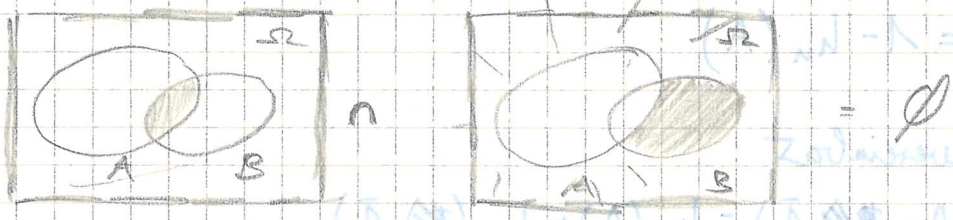
$$h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) - h_n(A \cap B)$$

Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung: de Méré 1650

1930

HH: 28|12
13c-e
32|5

28/12)



13c)

$(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) = [(A \cup B) \cap \bar{A}] \cup [(A \cup B) \cup B]$

$= [(\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B)] \cup [(B \cup A) \cup B] =$

$= (\bar{A} \cap B) \cup (A \cup B) = (\bar{A} \cap B) \cup A \cup B$

$= [(A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B)] \cup B =$

$= A \cup B$

13c)

$(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) = [(\bar{A} \cup B) \cap A] \cup [(\bar{A} \cup B) \cap B] =$

$= [(A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B)] \cup$ [illegible] $= B =$

[illegible] $= (A \cap B) \cup B = B$

(Distributivgesetze, komplementäres Element, neutrales Element, [illegible], Absorptionsgesetze)

13d)

$A \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) = \Omega \cap (A \cup B) = A \cup B$

(Distributivgesetze, komplementäres & neutrales Element)

13e)

$(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = [(\bar{A} \cap B) \cup A] \cap [(\bar{A} \cap B) \cup B] =$

$= [(A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B)] \cap B = \Omega \cap (A \cup B) \cap B =$

$= (A \cup B) \cap B = B$

(Distributivg., kompl. & neutr. El., [illegible], Absorptionsg.)

32|5)

$h_n(\bar{A}) = 1 - h_n(A)$

$A, \bar{A}$ unvereinbar

$\Rightarrow h_n(A \cup \bar{A}) = h_n(A) + h_n(\bar{A})$

$h_n(\Omega) = h_n(A) + h_n(\bar{A})$

$h_n(\bar{A}) = 1 - h_n(A)$

1650 Chevalier de Méré: Würfel-, Kartenspiele

1750 Laplace: Teildefinition der Wahrscheinlichkeit

1900 von Mises: $\lim_{n \to \infty} h_n(A)$ ... leider falsch

1933 Kolmogorow

§5 Der Wahrscheinlichkeitsraum

5.1 Axiomensystem von Kolmogorow (1930)

Die Funktion $P: \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$

$A \to P(A)$

heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn gilt:

1) $P(A) \geq 0$ (nichtnegativ)

2) $P(\Omega) = 1$ (normiert)

3) A, B unvereinbar

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (additiv)

5.2 Bemerkung

Jedes Zufallsexperiment wird durch Ω, $\mathfrak{P}(\Omega)$ und P eindeutig beschrieben. Dieses Tripel $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum.

Beispiel:

„Würfeln": $\Omega = \{1, \dots 6\}$, $\mathcal{P}(\Omega)$

P: $\{\omega\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	...	$\{6\}$
$P(\{\omega\})$	0	0	00 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

44|14, 15
51|16

44|14)

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$; $P(\{\{\omega_1\}) = 0{,}4$; [illegible]

$P(\{\omega_2\}) = 3 \cdot P(\{\omega_3\})$

a) $P(\{\omega_1\}) = 0{,}4$; [illegible]

$P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) = 1 - P(\{\omega_1\})$

" " $= 0{,}6$

$3 \cdot P(\{\omega_3\}) + P(\{\omega_3\}) = 0{,}6$

$P(\{\omega_3\}) = \frac{0{,}6}{4} = 0{,}15$

$P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_3\}) \cdot 3 = 0{,}45$

b) [illegible] Aclst.

c)

P: $\{\omega\}$	ω_1	ω_2	ω_3
$P(\{\omega\})$	0,4	0,45	0,15

15)

$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\})$; $P(\{\omega_3\}) = P(\{\omega_4\}) = 2 \cdot P(\{\omega_1\})$

a) $1 = 2x + 2 \cdot \frac{1}{2}x$

$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{6}$

$P(\{\omega_3\}) = P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{3}$

b) $\mathcal{P}(\Omega) = \{\{\omega_1\}\{\omega_2\}\{\omega_3\}\{\omega_4\}\{\}\{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4\}\{\omega_1\omega_2\}\{\omega_1\omega_3\}\{\omega_1\omega_4\}\{\omega_2\omega_3\}$
$\{\omega_2\omega_4\}\{\omega_3\omega_4\}\{\omega_1\omega_2\omega_3\}\{\omega_1\omega_2\omega_4\}\{\omega_1\omega_3\omega_4\}\{\omega_2\omega_3\omega_4\}\}$

$\{\omega\}$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$P(\{\omega\})$	1/6	1/6	1/3	1/3

1(f) $A = 1/6$

$B = 1 - 1/6 = 5/6$

$C =$

$D =$

E

F

$G =$

$H = \emptyset$

5.3 Wahrscheinlichkeitsverteilung

Def.: Die Wertetabelle von P für sämtliche Elementarereignisse eines Zufallsexperiments heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung

Bsp.: „Würfeln": $\Omega, \mathcal{P}(\Omega)$

P:	$\{\omega\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	...	$\{6\}$
	$P(\{\omega\})$	$1/6$	$1/6$	...	$1/6$

5.4 Der klassische Wahrscheinlichkeitsraum (Laplace-Raum)

Eigenschaft: sämtliche Elementarereignisse sind gleichwahrscheinlich

geg.: Laplace-Element

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n\} \qquad |\Omega| = n$$

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots P(\{\omega_n\}) \qquad \text{(Laplace-Eigenschaft)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = 1$$

$$\Rightarrow P(\{\omega_i\}) = 1/n = \frac{1}{|\Omega|}$$

Ereignis: $A \subset \Omega$

$$A = \{\omega_{k_1}, \dots \omega_{k_\ell}\}$$

$$P(A) = P(\{\omega_{k_1}\}) + \dots P(\{\omega_{k_\ell}\}) = \ell \cdot \frac{1}{n} = \frac{\ell}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}}$$

Beispiel: 2-Würfel

1. $P(\{k\}) = \frac{1}{6}$ für $k = 1, \dots 6$

   A: „gerade Zahl" $|A| = 3$

   $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2. 2-Würfel zweimal hintereinander

   $\Omega = \{1, \dots 6\}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \{1, \dots 6\}\}$ ✓ $|\Omega| = 36$

   $\mathcal{P}(\Omega)$ ✓

   $P(\{(x_1, x_2)\}) = \frac{1}{36}$

   A_1: „gleiche Zahl"

   A_2: „1. Wurf Primzahl, 2. Wurf gerade"

   A_3: „Augensumme 8"

   $|A_1| = 6 \Rightarrow P(A_1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

   $|A_2| = 9 \Rightarrow P(A_2) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

   $|A_3| = 5 \Rightarrow P(A_3) = \frac{5}{36}$

HA: 17, 18, 16

16)

$|A| = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$|B| = 36 - 6 = 30 \Rightarrow P(B) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

$|C| = 10 \Rightarrow P(C) = \frac{10}{36}$

$|D| = 11 \Rightarrow P(D) = \frac{11}{36}$

$|F| = 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow P(F) = \frac{1}{6}$

$|G| = 36 - |\overline{G}| = 36 - 12 = 24 \Rightarrow P(G) = \frac{2}{3}$

$|H| = 6 \Rightarrow P(H) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$|E| = 11 \Rightarrow P(E) = \frac{11}{36}$

17) $\Omega = \{(x_1x_2x_3x_4) \mid x_1,x_2,x_3,x_4 \in \{K,Z\}\}$ $|\Omega| = 16$

$|A| = 1 - |\text{keinmal K}| = 16 - 1 = 15$

$P(A) = \frac{15}{16}$

$|B| = 4$; $P(B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$|C| =$ [illegible]

$|\Omega| - |\bar{C}| = 16 - 4 = 12$

$P(C) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

$|D| = 1 + 4 = 5$; $P(D) = \frac{5}{16}$

$|E| = |\Omega| - |\bar{E}| = 16 - 2 = 14$; $P(E) = \frac{14}{16}$

18)

$|A| = 4$; $P(A) = \frac{4}{52}$

$|B| = 13$; $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

$|C| = 4 + 13 - 1 = 16$; $P(C) = \frac{16}{52}$

5.5 Folgerungen aus dem Axiomensystem von Kolmogorow

1) $\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$ Beweis: $A \dot\cup \bar{A} = \Omega$

$P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$

$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2) $\boxed{P(\emptyset) = 0}$ Beweis: $\bar{\Omega} = \emptyset$

$P(\emptyset) = 1 - 1 = 0$ (s.o.)

3) $A, B \subset \Omega$ beliebig

$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Beweis: $A \cup B = A \dot\cup (\bar{A} \cap B)$

$B = (\bar{A} \cap B) \dot\cup (A \cap B)$

$\Rightarrow P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Es ist: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4) $A, B \subset \Omega$: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Beweis:

$B = A \cup (B \cap \bar{A})$

$P(B) = P(A) + P(B \cap \bar{A})$ mit $P(B \cap \bar{A}) \geq 0$

$\Rightarrow P(B) \geq P(A)$

42/

11) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A) \leq P(\bar{B})$

$\bar{B} = A \cup (\bar{B} \cap \bar{A})$; $P(\bar{B}) = P(A) + P(\bar{B} \cap \bar{A})$ mit $P(\bar{B} \cap \bar{A}) \geq 0$

$\Rightarrow P(A) \leq P(\bar{B})$

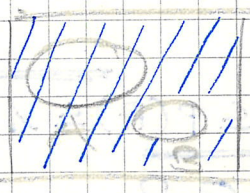
12) $P(A) = P(B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = 1$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$A \subseteq (A \cup B) \Rightarrow P(A) \leq P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cup B) = 1$

$\hookrightarrow 1 = 1 + 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1$

42 | 11.12
52 | 19.20



52/19)

$\Omega = \{1 \ldots 400\}$; $|\Omega| = 400$

$|A| = 366$; $P(A) = \frac{66}{400} = \frac{33}{200}$

$|B| = 50$; $P(B) = \frac{50}{400} = \frac{1}{8}$

$|C| = 33$; $P(C) = \frac{33}{400}$

$|D| = 66 + 50 - 16 = 100$; $P(D) = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$

$|E| = 66 + 50 + 33 - 16 = 133$; $P(E) = \frac{133}{400}$

$|F| = 16$; $P(F) = \frac{16}{400} = \frac{1}{25}$

Integer: [x]

20) $|\Omega| = 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 = 156$

$|A| = 1$; $P(A) = \frac{1}{156}$

$|B| = 6$; $P(B) = \frac{6}{156}$

$|C| = 5$; $P(C) = \frac{5}{156}$

$|D| = 30$; $P(D) = \frac{30}{156}$

$|E| = |\Omega| - |B| = 150$; $P(E) = \frac{150}{156}$

$|F| = 1$; $P(F) = \frac{1}{156}$

$|G| = 2$; $P(G) = \frac{2}{156}$

$|\Omega| = 6^3 = 216$

$|A| = 1$; $P(A) = \frac{1}{216}$

$|B| = 6$; $P(B) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$

$|C| = 15$; $P(C) = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$

$|D| = 30$; $P(D) = \frac{90}{216} = \frac{5}{12}$

$|E| = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$; $P(E) = \frac{120}{216}$

$|F| = 3$; $P(F) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$

$|G| = 6$; $P(G) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$

5. $0 \leq P(A) \leq 1$

$\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$

$P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega)$

$0 \leq P(A) \leq 1$

Bsp.: $\Omega = \{1 \dots 6\}^2$ $\quad |\Omega| = 36$

1. A_4: „mindestens eine 6" $\quad |A_4| = |\Omega| - |\overline{A_4}| = 36 - 25 = 11$

$\overline{A_4}$: „keine 6" $\quad |\overline{A_4}| = 5 \cdot 5 = 25$

$P(\overline{A_4}) = \frac{25}{36}$

$P(\overline{A_4}) = \frac{11}{36}$

2. $A_5 = A_3 \cup A_4$ (A_3: „Augensumme 8") (A_4: „mind. eine 6")

$P(A_5) = P(A_3 \cup A_4) = P(A_3) + P(A_4) - P(A_3 \cap A_4) =$

$= \frac{5}{36} + \frac{11}{36} - \frac{2}{36} = \frac{14}{36}$

3. $P(A) = a$; $P(B) = b$; $P(A \cup B) = c$

gesucht: $P(\bar{A} \cup \bar{B})$, $P(\bar{A} \cap B)$

Lösung: $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$

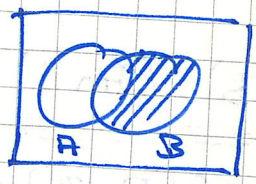
$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = a + b - c$

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - a - b + c$

$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A \cup B) - P(A) = c - a$



8) ~~$\bar{A} \cap \bar{B}$~~

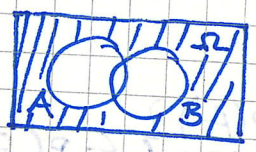
42/8,10

$P(A) = a$; $P(B) = b$; $c = P(A \cup B)$

$\bar{A} \cap \bar{B}$ „Keines von beiden tritt ein"

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) =$

$= \underline{1 - c}$



✓

$A \cap \bar{B}$ „nur A tritt ein"

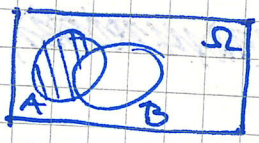
$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A) - P(B) + P(A \cup B) =$

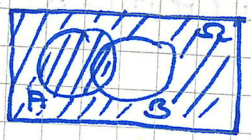
$= P(A \cup B) - P(B) = \underline{c - b}$



✓

$A \cup \bar{B}$ ~~„B tritt nicht ein"~~

„B tritt nicht allein ein"



✓

$P(A \cup \bar{B}) = P(\Omega) - P(B) + P(A \cap B)$

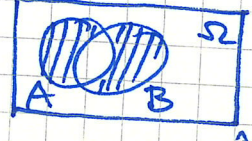
$P(A \cup \bar{B}) = 1 - b + a + b - c =$

$= \underline{1 + a - c}$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) =$

$= a + b - c$

$\underline{(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)}$ „entweder A oder B tritt ein"



✓

$P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(B) -$

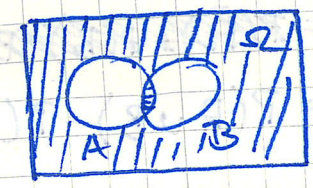
$2P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = a + b - c$

$P[(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{B} \cap A)] = a + b - 2(a + b - c) = a + b - 2a - 2b + 2c =$

$= 2c - a - b$

$(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$ „Ein Ereignis tritt nicht allein ein"



$P([A \cap B] \cup [\bar{A} \cap \bar{B}]) = P(\Omega) - P(A) - P(B) + 2P(A \cap B) =$

$= 1 - 2c + a + b$

10) $A, B \subseteq \Omega$

$P(A \cap B) \leq \begin{Bmatrix} P(A) \\ P(B) \end{Bmatrix} \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

$(A \cap B) \subseteq B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(B)$

$(A \cap B) \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A)$

$A \subseteq (A \cup B) \Rightarrow P(A) \leq P(A \cup B)$

$B \subseteq (A \cup B) \Rightarrow P(B) \leq P(A \cup B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\geq 0}$

$\Rightarrow P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

geg.: $P(E_1) = 0{,}4$

$P(E_2) = 0{,}7$

$P(E_1 \cap E_2) = 0{,}3$

ges.: $E_3: E_1 \cup E_2$; $E_4: (E_1 \cap \bar{E}_2) \cup (\bar{E}_1 \cup E_2)$; $E_5: E_1 \setminus E_2$

Lsg.: $P(E_3) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0{,}8$

~~$P(E_4) = P(E_1) + P(E_2) - 2P(E_1 \cap E_2)$~~

$P(E_4) = P(E_1) + P(E_2) - 2P(E_1 \cap E_2) = 0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}6 = 0{,}5$

$P(E_5) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2) = 0{,}1$

§6 Kombinatorik

Allgemein:

Zählprinzip:

$|A_1 \times A_2 \times \dots A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots |A_n|$

d.h.

$\Omega = \{(x_1; x_2; \dots x_n) \mid x_i \in A_i;\ i = 1 \dots n\}$ $\quad |A_i| = n_i$

n_1 n_2 n_n Möglichkeiten

$|\Omega| = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots n_n$

Beispiel:

E_1: 1) Münze werfen

2) Würfel

4) Karte aus 52 Karten

$\Omega_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in \{K, Z\};\ x_2 \in \{1 \dots 6\}, x_3 \in \{1 \dots 52\}\}$

$|\Omega_1| = 2 \cdot 6 \cdot 52 = 624$

E_2: 4 mal Würfeln

~~$\Omega_2 = \{(x_1 x_2 x_3 x_4) \mid x_i$~~ $\Omega = \{1 \dots 6\}^4$

$|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$

E_3: Urne mit n Kugeln

Hintereinander Ziehen von k Kugeln mit Zurücklegen

$\Omega_3 = \{(x_1 \dots x_k) \mid x_i \in \{1 \dots n\}; i \in \{1 \dots k\}\}$

$|\Omega_3| = n^k$

„Anzahl der k-Tupel aus einer n-Menge mit Wiederholung"

Weitere Beispiele:

1) 3 Personen auf 3 Plätze verteilen

$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{1,2,3\}; i = 1,2,3; x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\}$

(x_1, x_2, x_3: Stühle; $1,2,3$: Personen)

$|\Omega| = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

2) Bilde 5stellige Zahlen aus dem $\{1,2,3,4,5\}$ ohne Wiederholung

$|\Omega| = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

3) Urne mit n Kugeln

Hintereinander Ziehen von n Kugeln ohne Zurücklegen

$\Omega = \{(x_1 \dots x_n) \mid x_i \in \{1 \dots n\}, i \in \{1 \dots n\}; x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j$

$|\Omega| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

„Anzahl der n-Tupel aus einer n-Menge ohne Wiederholung"

Abkürzung: $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ (Fakultät)

Also: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$3! = 6$

n-Permutation

67/25,26,29,33

67/25)

$\Omega = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_i \in \{1..4\},\ i \in \{1..4\},\ x_i \neq x_j \text{ für } j \neq i\}$

$|\Omega| = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$

26)

$\Omega = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \mid x_i \in \{1,2\},\ i \in \{1..5\}\}$

$|\Omega| = 2^5 - 2 = 32 - 2$

29)

$\Omega = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 \in \{1..3\}, x_2 \in \{1..4\}, x_3 \in \{1..6\}\}$

$|\Omega| = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$

33)

$\Omega = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_i \in \{1..4\},\ i \in \{1..4\}\} = \{1..4\}^4$

$|\Omega| = 4^4 = 256$

Weitere Beispiele:

1) 5 Personen auf 3 Plätze

$\Omega = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_i \in \{1..5\},\ i = 1,2,3;\ x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\}$

$|\Omega| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5!}{2!}$

2) 2-stellige Zahlen aus $\{1..6\}$ ohne Wiederholung

$\Omega = \{(x_1,x_2) \mid x_i \in \{1..6\};\ i = 1,2;\ x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\}$

$|\Omega| = 6 \cdot 5 = \frac{6!}{4!} = \frac{6!}{(6-2)!}$

3) Urne mit n Kugel

Hintereinander ziehen von k ($\leq n$) Kugeln ohne Zurücklegen

$\Omega = \{(x_1 \ldots x_k) \mid x_i \in \{1..n\};\ i = 1..k;\ x_i \neq x_j;\ i \neq j\}$

$|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!}$

k-Permutation aus n-Menge

Anzahl: $|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!}$

Spezialfall: $k = n$

$$\frac{n!}{(n-n)!} = n!$$ Formel 2

Definition: $0! = 1$

67 | 32, 39, 68 | 40, 49

32)

$\Omega = \{(x_1 x_2 x_3) \mid x_i \in \{1 \dots 7\},\ i = 1,2,3;\ x_i \neq x_j, i \neq j\}$

$|\Omega| = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!}$

39) a) $\Omega = \{(x_1, \dots x_{10}) \mid x_i \in \{K, Z\},\ i = 1 \dots 10\}$; $|\Omega| = 2^{10}$

b) ~~$\Omega = \{x_1 \dots x_{10}\} \mid x_i \in \{K, Z\},\ i = 1 \dots 10\}$; $|\Omega| = 11$~~

$\Omega = \{0 \dots 10\}$; $|\Omega| = 11$

~~40)~~ $\bar{A}$: „Einmal oder dreimal K“; $|\bar{A}| = 4$; ~~$|\Omega| = 2^3 = 8$~~

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |\bar{A}|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$

40) $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|3|}{|2^3|} = \frac{3}{8}$; $\Omega = \{(x_1 x_2 x_3) \mid x_i \in \{K, Z\},\ i = 1 \dots 3\}$

49) $\Omega = \{(x_1 \dots x_5) \mid x_i \in \{0 \dots 9\},\ i = 1 \dots 5\}$

$|\Omega| = 10^5$

A: „mind. 2 Personen merken sich die selbe Zahl“

$\{\bar{A}\}$: „alle haben verschiedene Zahlen“

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |\bar{A}|}{|\Omega|} = \frac{10^5 - \frac{10!}{5!}}{10^5} =$

$= \frac{69760}{100000}$

Weitere Beispiele:

1) Anzahl von 3 Personen aus einer Menge von 5 Personen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

$M = \{1, \dots 5\}$; $\Omega = \{\{x_1 x_2 x_3\} \mid x_i \in \{1 \dots 5\}, i = 1,2,3, x_i \neq x_j, i \neq j\}$

$|\Omega| = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5!}{2! \, 3!}$

Lsg.: Anzahl 3er-Permutationen aus 5er-Menge : $\frac{5!}{(5-3)!}$

Anzahl 3er-Permutationen einer 3er-Menge: $3!$

Anzahl 3er-Mengen aus 5er Menge: $\frac{5!}{(5-3)! \, 3!}$

2) Urne mit n Kugeln

E: gleichzeitiges Ziehen von k ($\leq n$) Kugeln

$\Omega = \{\{x_1 \dots x_k\} \mid x_i \in \{1 \dots n\}, i = 1 \dots k, x_i \neq x_j, i \neq j\}$

$|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$

1) Anzahl der k-Permutationen aus einer n-Menge: $\frac{n!}{(n-k)!}$

2) Anzahl der k-Permutationen einer k-Menge: $k!$

3) Anzahl der k-Teilmengen aus n-Menge: $\frac{n!}{(n-k)! \, k!}$

Abkürzung: $\frac{n!}{(n-k)! \, k!} = \binom{n}{k}$ „k aus n"

Binomialkoeffizient

A: „jede Gruppe enthält gleichviele Jungen und M." 69/48

$\Omega = \{\{0,1,2,3,4\}\}$; $|A| = 1$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{5}$

Zusammenfassung

gegeben: Urne mit n Kugeln

Modell	Versuchsergebnisse	Anzahl
1. Hintereinanderziehen von k Kugeln mit Zurücklegen	k-Tupel mit Wiederholungen	n^k
2. Hintereinanderziehen von n ($=k$) Kugeln ohne Zurücklegen	n-Permutation aus n-Menge	$n!$
3. Hintereinanderziehen von k Kugeln ohne Zurücklegen	k-Permutation aus n-Menge	$\frac{n!}{(n-k)!}$
4. Gleichzeitiges Ziehen von k ($\leq n$) Kugeln	k-Teilmengen aus n-Menge	$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ $\binom{n}{k}$

Ha: 67/26, 30, 35, 43, 44, 48
31, 41, 42, (30)

67/26)

$\Omega = \{(x_1 \dots x_5) \mid x_i \in (1,2);\ i = 1 \dots 5 \setminus (1 \dots 1), (2 \dots 2)\}$

$|\Omega| = 2^5 - 2 = 30$

35)

$\Omega = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4 \dots x_8\} \mid x_i \in \{1 \dots 32\};\ i = 1 \dots 8;\ x_i \neq x_j, i \neq j\}$

$|\Omega| = \binom{32}{8} = \frac{32!}{(32-8)!\,8!} = 10518300$

43)

$\Omega = \{(x_1, x_2 \dots x_4) \mid x_i \in \{1 \dots 6\};\ i = 1 \dots 4\};\ |\Omega| = 6^4$

$|A| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3;\ P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{60}{6^3} = \frac{10}{36}$

$|B| = 16^4 - 6$ [illegible]; $P(B) = \frac{1290}{64} = \frac{1290}{1296}$

$|C| = $ [illegible] $4! \cdot \frac{1}{2} = 12;\ P(C) = \frac{12}{6^4}$

44)

a) $\Omega = \{(x_1 \dots x_4) \mid x_i \in \{1 \dots 6\};\ i = 1 \dots 4\};\ |\Omega| = 6^4$

$|A| = |\Omega| - |\bar{A}| = 6^4 - 5^4;\ P(A) = \frac{671}{1296} \approx 0{,}51$

b) $\Omega = \{((x_1, x_2) \dots (x_{47}, x_{46})) \mid x_i \in \{1 \dots 6\};\ i = 1 \dots 46\};\ |\Omega| = (6 \cdot 6)^{24}$

?! $|B| = |\Omega| - |\bar{B}| = (6 \cdot 6)^{24} - (6 \cdot 5)^{24}$

$P(B) = \frac{36^{24} - 30^{24}}{36^{24}}$ $\quad 35^{24}$ $\quad 36^{24} - (5 \cdot 5)^{24}$

48) [illegible]

30) s. 32 $\Omega = \{(\{x_1 \dots x_5\}, \{x_6 \dots x_8\}, \{x_9, x_{10}\}) \mid x_i \in \{1 \dots 10\};\ i = 1 \dots 10;\ x_i \neq x_j;\ i \neq j\}$

$\Omega = \{(x_1 \dots x_{10}) \mid x_i \in \{T_1 \dots T_5, B_1 \dots B_3, W_1, W_2\};\ i = 1 \dots 10;$

$x_i \neq x_j;\ i \neq j\}$

Anzahl der Möglichkeiten:

$\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = 2520 = \frac{10!}{5!\,3!\,2!}$

30B)

$\Omega_2 = \{(x_1 \dots x_{10}) \mid x_i \in \{1 \dots 10\};\ i = 1 \dots 10;\ x_i \neq x_j\ i \neq j\}$

$|\Omega_2| = 10!$

$\Omega_2 - \Omega = 3626280$

31) 4, 3, 6

Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{13}{4}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{6} = 60060$

$\Omega = \{(x_1 \dots x_{13}) \mid x_i \in \{A_1 \dots A_4, B_1 \dots B_3, C_1 \dots C_6\}; i = 1 \dots 13$
$x_i \neq x_j, i \neq j\}$

41) $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{1 \dots 4\}; i = 1,2,3\}$; $|\Omega| = \frac{4!}{1!} = 4!$
$x_i \neq x_j \; \forall \; i \neq j$

$P(A) = 50\% = \frac{1}{2}$ $\quad |A| = 2 \cdot \frac{3!}{1!}$

42) $\Omega = \{(x_1 \dots x_8) \mid$

$|\Omega| = \binom{8}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{1}{1} = 1680$

a) $|A| = \binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2} = 180$ $\quad P(A) = \frac{3}{28}$

b) $|B| = \binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{1} = 60$ $\quad P(B) = \frac{1}{28}$

42) $|\Omega| = \frac{8!}{2!\,3!\,2!\,1!} = 1680$

a) $|A| = \frac{6!}{2!\,1!\,2!\,1!} = 180$; $P(A) = \frac{3}{28}$

b) $|B| = \frac{5!}{1!\,2!\,1!\,1!} = 60$; $P(B) = \frac{1}{28}$

46) $\Omega = \{(x_1 \dots x_4) \mid x_i \in \{1 \dots 8\}, x_i \neq x_j \; \forall \; i \neq j\}$

$|\Omega| = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\,4!}$

Bsp.: Zahlenlotto

$$\Omega = \{\{x_1 \dots x_6\} \mid x_i \in \{1 \dots 49\};\ i = 1 \dots 6;\ x_i \neq x_j \text{ f. } i \neq j\}$$

$$|\Omega| = \frac{49!}{43!\,6!} = \binom{49}{6} = 13{,}983 \cdot 10^6 \approx 14 \cdot 10^6$$

A_3: „3 Richtige"

$$|A_3| = \binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} \Rightarrow P(A_3) = \frac{6! \cdot 43!}{3!\,3!} \cdot \frac{43!\,6!}{40!\,3!} \cdot \frac{}{49!}$$

A_k: „k Richtige"; $k = 0 \dots 6$

$$|A_k| = \binom{6}{k} \cdot \binom{43}{6-k}$$

$$P(A_k) = \frac{6! \cdot 43! \cdot 43! \cdot 6!}{(6-k)!\,k!\,(37+k)!\,(6-k)!\,49!}$$

B: „5 Richtige mit Zusatzzahl"

$$|B| = \binom{6}{5} \cdot \binom{1}{1}$$

$$P(B) = \frac{6!}{5!\,1!} \cdot \frac{1!\,43!\,6!}{1!\,0!\,49!} = \frac{6! \cdot 43! \cdot 6!}{5!\,49!}$$

B': „5 Richtige"

$$|B| = \binom{6}{5} \cdot \binom{42}{1}$$

HA: 68|45

HA: 45) $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{1 \dots 6\};\ i = 1 \dots 3\}$; $|\Omega| = 6^3$

a) $|A_1| = 1 \cdot 5 \cdot 5 = 25$; $P(A_1) = \frac{25}{6^3}$

b) $|A_2| = 75$; $P(A_2) = \frac{75}{6^3}$

c) $|A_3| = 1 \cdot 5 \cdot 1 = 5$; $P(A_3) = \frac{5}{6^3}$

d) $|A_4| = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 3 = 15$; $P(A_4) = \frac{15}{6^3}$

$|A_5| = |\Omega| - 5^3$; $P(A_5) = \frac{6^3 - 5^3}{6^3} = 1 - \frac{5^3}{6^3}$

$|A_6| = 16$? $\quad |A_6| = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 3 = 18$; $P(A_6) = \frac{18}{6^3}$

$|A_7| = 6 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 3 = 90$; $P(A_7) = \frac{90}{6^3}$

$|A_8| = 16 \cdot 6$? $\quad |A_8| = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot 6 = 120$; $P(A_8) = \frac{120}{6^3}$

$|A_9| = $; $P(A_9) = $ $\quad \frac{120}{6^3} = \frac{5}{9}$

$|A_{10}| = 27$; $P(A_{10}) = \frac{27}{6^3} = \frac{3}{6 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 6} = \frac{1}{8}$

$\Omega = \{K, Z\}^4 \quad |\Omega| = 2^4$

A: „genau 1 mal K"

$P(A_1) = \frac{4}{2^4}$

$P(A_0) = \frac{1}{2^4}$

$P(A_2) = \frac{\binom{4}{2}}{2^4}$

$P(A_k) = \frac{\binom{4}{k}}{2^4}$

$\sum_{k=0}^{4} P(A_k) = 1$ weil A_{k_1} unvereinbar, und Zerlegung von Ω sind

$$A_0 \dot\cup A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup A_3 \dot\cup A_4 = \Omega$$

Urne: 4s, 7w

E: „gleichzeitiges Ziehen von 5 Kugeln"

$\Omega = \{\{x_1 \dots x_5\} \mid x_i \in \{\underbrace{1 \dots 4}_{s} \underbrace{11}_{w}\}, i = 1 \dots 5, x_i \neq x_j, i \neq j\}$

$|\Omega| = \binom{11}{5}$

A: „3w, 2s"

$|A| = \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} = \frac{7!}{4!3!} \cdot \frac{4!}{2!2!}$

$P(A) = \frac{7!4!}{4!3!2!2!} \cdot \frac{6!5!}{11!} = \frac{5}{11}$

67|38

66|22, 24a

38) $\Omega = \{$

$|\Omega| = \frac{8!}{8} = 7!$

22) $\binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$

$\binom{15}{13} = \frac{15!}{2!13!} = 105$

$\binom{20}{19} = \frac{20!}{1!19!} = 20$

24a) $k \cdot \binom{m}{k} = \frac{k\,m!}{(m-k)!\,k!} = \frac{k \cdot m(m-1)!}{k(k-1)!(m-k)!} = m \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!}$

$m \cdot \binom{m-1}{k-1} = \frac{m \cdot (m-1)!}{(k-1)!(m-1-k+1)!} = m \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!}$

6.3. Der Binomialsatz

$a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}$

$(a_1+b)\cdot(a_2+b) = a_1a_2 + a_1b + a_2b + b^2$

$(a_1+b)(a_2+b)(a_3+b) =$

$= a_1a_2a_3 + a_1a_3b + a_2a_3b + a_3b^2 + a_1a_2b + a_1b^2 + a_2b^2 + b^3$

$(a_1+b)\cdot(a_2+b)\cdot\ldots\cdot(a_n+b)$ = Summe aus Produkten zu n Faktoren

Mit $\binom{n}{k}$ Summanden zu k Faktoren a_ν und $(n-k)$ Faktoren b.

Setze: $a_\nu = a$ für alle $\nu = 1 \ldots n$

$(a+b)^n$: Summe aus Produkten zu n Faktoren mit $\binom{n}{k}$ Summanden zu k Faktoren in a: a^k zu $(n-k)$ Faktoren in b: b^{n-k}

also:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Allgemein: $\Rightarrow (a+b)^n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \cdot a^v \cdot b^{n-v}$

Speziell: * $n=2$: $(a+b)^2 = \binom{2}{0}\cdot a^0 \cdot b^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2}\cdot a^2 \cdot b^0 =$

$= b^2 + 2ab + a^2$

* $n=3$: $(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^0 b^3 + \binom{3}{1} a^1 b^2 + \binom{3}{2} a^2 b^1 + \binom{3}{3} a^3 b^0 =$

$= b^3 + 3ab^2 + 3a^2b + a^3$

Formel: 1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} =$

$= \frac{n!\,(k+1+n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} =$

$= \binom{n+1}{k+1}$ q.e.d.

ad 1.: $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-n+k)!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$ q.e.d.

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

HA:

$\binom{0}{0}$

$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$

$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$

$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$

$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$

$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$

$\binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

$15 = \frac{6!}{2!\,4!}$ $\quad 20 = \frac{6!}{3!\,3!}$ $\quad 15 = \frac{6!}{4!\,2!}$

10: $\frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5!}{2!\,3!}$

$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^0b^6 + \binom{6}{1}a^1b^5 + \binom{6}{2}a^2b^4 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^4b^2 + \binom{6}{5}a^5b^1 + \binom{6}{6}a^6b^0$

Speziell:

① Setze $a = b = 1$

$$2^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu}$$

② Setze $a = -1,\ b = 1$

$$0 = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \cdot (-1)^\nu$$

§7 Unabhängigkeit

zug.: 1000 Schüler

B: „blond"

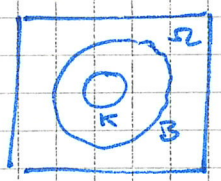
K: „kurzsichtig"

Ergebnis: $|B| = 300$

$|K| = 100$

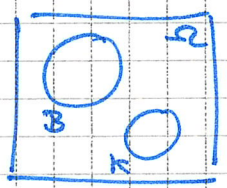
Betrachte: $B \cap K$

Möglichkeiten:

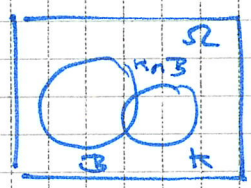


$K \subset B$

$K \cap B = K$



$K \cap B = \emptyset$



$K \cap B \subsetneq K$

$$\frac{|K \cap B|}{|B|} = \frac{|K|}{|\Omega|}$$

MB:

$$|\Omega| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$\Omega = \{\{x_1 \dots x_k\} \mid x_i \in \{1 \dots n\};\ i = 1 \dots k;\ x_i \neq x_j;\ i \neq j\}$$

$$P(A) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

HA: $\Omega = \{(x_1 \dots x_k) \mid x_i \in \{1 \dots n\},\ i = 1 \dots k\}$; $|\Omega| = k^n$

$|A| = k!$

$|B| = \frac{n!}{k!}$

Videoaufzeichnung

HHZ:

Ha, Post, Christine, Sebastian

§8 Die Bernoulli-Kette

8.1 Das Bernoulli-Experiment

A eingetreten? ja - nein

Treffer: T : 1

Nieten: N : 0

$\Omega_0 = \{0, 1\}$ Ergebnisraum

$\mathcal{P}(\Omega) = \{\{0\}, \{1\}, \Omega, \emptyset\}$ Ereignisraum

$P: \emptyset \longrightarrow 0$ Maß

$\Omega_0 \longrightarrow 1$

$\{1\} \longrightarrow p$ Trefferwahrscheinlichk.

$\{0\} \longrightarrow q = 1-p$

Beispiel: 1-mal würfeln

$A :=$ „6" $\quad p = \frac{1}{6}$

8.2 Definition

Zwei Experimente E_1, E_2 heißen unabhängig, wenn je zwei Ereignisse $A_1 \in E_1$ und $A_2 \in E_2$ unabhängig sind.

Beispiel:

E_1: Würfeln: $\Omega_1 = \{1 \dots 6\}$

E_2: Münze: $\Omega_2 = \{K, Z\}$

Zusammengesetztes Experiment: $E_1 \times E_2$

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \Omega_1 ; x_2 \in \Omega_2\} ; |\Omega| = 12$

A_1: „mindestens 5" $\quad A_2$: „Kopf"

$A = A_1 \times A_2$

E_1, E_2 unabhängig

$\Rightarrow P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) = P(A_1 \times A_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

8.3 Definition:

Ein aus n unabhängigen, gleichen Bernoulli-Experimenten zusammengesetztes Experiment heißt Bernoulli-Kette der Länge n

Bsp.:

10 mal Würfeln

T: „6" $\Rightarrow p = \frac{1}{6}$

$n = 10$

$\Omega = \{(x_1, \dots x_{10}) \mid x_i \in \{0,1\}\ i = 1 \dots 10\}$

$\Omega = \{0,1\}^{10}$

$P(\{(1,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0)\}) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7$

↑ unabhängig

$P(\text{„genau 3 Treffer"}) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7$

HA: 69|47
79|17
83|1

47) $|A_1| = 365 \cdot 364 = \frac{365!}{363!}$

$P(A_1) = \frac{365 \cdot 364}{365 \cdot 365} = \frac{364}{365}$

$P(A_2) = \frac{365 \cdot 1}{365^2} = \frac{1}{365}$

$P(A_3) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365^3} \approx 0{,}99$

$P(A_4) = \frac{365^3 - 365 \cdot 364 \cdot 363}{365^3} \approx 0{,}0082$

$P(A_5) = \frac{365^k - \frac{365!}{(365-k)!}}{365^k}$

1093
365
365

17) $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$

$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{0,1\};\ i = 1 \dots 3\}$

a) ~~P(A)~~

$P(A) = \frac{11}{24}$ | $\cap : \cdot$

b) $P(B) = \frac{17}{24} = \frac{11}{24} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ | $\cup : +$

c) $P(C) = \frac{3}{4} = 1 - \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

d) ~~$|D| = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$; $P(D) = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$~~

$P(D) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$

83/1)

a) $\Omega = \{(x_1 \dots x_5) \mid x_i \in \{0,1\},\ i = 1 \dots 5\}$

b) ~~$P(A) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \frac{1}{3} = \frac{5! \cdot 2222}{4! \cdot 3333} = \frac{80}{81}$~~

$P(B) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{243 - 32}{243} = \frac{211}{243}$

$P(A) = \binom{5}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 =$

$= \frac{5 \cdot 2222}{3 \cdot 3333} = \frac{80}{243}$

Allgemein: Bernoulli-Kette der Länge n

$\Omega = \Omega_0^n = \{0,1\}^n = \{(x_1 \dots x_n) \mid x_i \in \{0,1\},\ i = 1 \dots n\}$

Ereignisse:

A_1: „genau n Treffer" ; $P(A_1) = p^n$

A_2: „mindestens eine Niete" ; $P(A_2) = 1 - p^n$

A_3: „genau n Nieten" ; $P(A_3) = (1-p)^n = q^n$

A_4: „mindestens ein Treffer" ; $P(A_4) = 1 - (1-p)^n = 1 - q^n$

geg.: L-Würfel

Wie oft muß man würfeln, um mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit wenigstens eine 6 zu haben?

1) Treffer an der i-ten Stelle: i-ter Wurf 6

2) $p = \frac{1}{6}$

3) $n = ?$

A: „mindestens einmal 6"

$P(A) = 1 - q^n \geq 0{,}99$

$1 - (1-p)^n \geq 0{,}99$

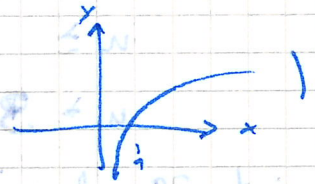
$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}99$

$0{,}01 \geq \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$\ln\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \ln 0{,}01$ (da ln streng monoton steigend!)

$n \ln\frac{5}{6} \leq \ln 0{,}01$

$n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln\frac{5}{6}}$ (da $\ln\frac{5}{6} < 0$)



$n \geq 25{,}26$

$\Rightarrow n = 26$ (da $n \in \mathbb{N}$)

HA: 83/2,3 84/6

2) A: „mindestens ein Teil fehlerhaft"

a) $P(A) = 1 - (1-p)^n = 1 - (1-0{,}03)^5 \approx 0{,}1412$

b) $P(A) = 1 - (1-0{,}003)^{250} \approx 0{,}52817$

3) $p = 0{,}1$

$P(A) = 1 - (1-p)^n \geq 0{,}9$

$-0{,}9^n \geq -0{,}1$

$0{,}9^n \leq 0{,}1$

$n \ln 0{,}9 \leq \ln 0{,}1$

$n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}9}$

$n \geq 21{,}85$

$\Rightarrow n \geq 22$

Es müssen mind. 22 Patienten teilnehmen.

6) a) $P(A) = 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^6 \approx 0{,}665$

b) $P(A) = \binom{6}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0{,}4$

c) $P(A) = 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^n \geq 0{,}999$

$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}999$

$0{,}001 \geq \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$\ln 0{,}001 \geq n \ln \frac{5}{6}$

$n \geq \frac{\ln 0{,}001}{\ln 5/6}$

$n \geq 37{,}89$

$n \geq 38$

Man muß mind. 38 mal würfeln.

Bgg.: B-Kette der Länge n:

$\Omega = \{0,1\}^n$, p

Z: „Anzahl der Treffer"

$Z = k$: „genau k Treffer"

$k \in \{0,1,\dots n\}$

$A = \{(\underbrace{1,1,1\dots1}_{k},\underbrace{0,\dots0}_{n-k})\}$

$P(A) = p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$P(Z=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

Bernoullische Formel:

$$P(Z=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Binomial-Verteilung

$k \in \{0,\dots n\}$

Maßzuweisung!!!

Funktion:

$B(n,p): k \longmapsto P(Z=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

83/5; 84/7

$B(n,p): k \to P(Z=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$

Binomialkoeffizient - Verteilung

$W_{B(n,p)} = \{0,1,\dots n\}$

$P(Z=k) = B(n,p,k)$

Funktionswert der $B(n,p)$-Funktion an der Stelle k

Bsp.: 10-mal würfeln

Bernoulli-Kette, wenn:

1. Treffer a.d. i-ten Stelle: i-ter Wurf 6
2. Trefferwahrscheinlichkeit: $p = 1/6$
3. Länge der Kette: $n = 10$

$P(Z=4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6$

S. 4/8

8) a) ~~$\Omega = \{1,2,3,4,5,11,12,13,14,15,16,21\dots26,31\dots36,41\dots46,$~~
~~$51\dots$~~

~~$\Omega = \{6,16,26,36,46,56,116,126,136,\dots156,216,226\dots225,$~~
~~$316\dots356,416\dots456,516\dots556,\times$~~

$\Omega = \{1\dots6\} \cup \{(x_1,x_2) \mid x_1 \in \{1\dots5\}, x_2 \in \{6\}\} \cup$
$\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_{1,}x_2 \in \{1\dots5\}, x_3 = 6\} \cup \{(x_1\dots x_4) \mid x_{1,2,3} \in$
$\{1\dots5\}, x_4 = 6\} \cup \{(x_1\dots x_5) \mid x_{1\dots4} \in \{1\dots5\}, x_5 = 6\}$
$\cup \{(x_1\dots x_6) \mid x_{1\dots5} \in \{1\dots5\}, x_6 = 6\} \cup \{(x_1\dots x_6) \mid x_i$
$\in \{1\dots5\}, i = 1\dots6\}$

b) $P(\text{beim 6. Wurf 6}) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} =$

c) $P(\text{keine 6}) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 =$

d) $P(\text{frühestens beim 5. Wurf 6}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 =$

5) a) $P(A) = 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^n \geq 50\%$

$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}5$

$n \ln \frac{5}{6} \leq \ln 0{,}5$

$n \geq \frac{\ln 0{,}5}{\ln \frac{5}{6}}$

$n \geq 3{,}8 \; ; \; n \geq 4$

b) $P(A) = 1 - \left(1 - \frac{1}{36}\right)^n \geq 0{,}5$

$n \geq \frac{\ln 0{,}5}{\ln \frac{35}{36}}$

$n \geq 24{,}6 \; ; \; n \geq 25$

c) $P(A) = 1 - \left(1 - \frac{1}{216}\right)^n \geq 0{,}5$

$n \geq \frac{\ln 0{,}5}{\ln \frac{215}{216}}$

$n \geq 149{,}4 \; ; \; n \geq 150$

7) a) $\Omega = \{(x_1 \ldots x_{10}) \mid x_i \in \{0,1\}, i = 1 \ldots 10\}$

b) $P(A_1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^5 = 1 - 0{,}5^5$

$= 0{,}96875$

~~$P(A_2) \geq P(A_1) \geq 0{,}9375$~~

d) $P(A_3) = 1 - (1 - 0{,}5)^n \geq 0{,}99$

$0{,}5^n \leq 0{,}01$

$n \ln 0{,}5 \leq \ln 0{,}01$

$n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}5}$

$n \geq 6{,}64$

$n \geq 7$

c) $P(A_2) = q^4 = 0{,}5^4 = \frac{1}{16}$

a) $\Omega = \{K, ZK, ZZK, ZZZK, \ldots ZZ \ldots ZK, Z \ldots Z\}$

$P(\xi = 3) = \frac{1}{2} \mid K \; ZK \; ZZK \; \ldots \; ZZ \ldots ZK, Z \ldots Z\}$

$\frac{1}{4} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

b) $P(\text{spät. 5. Wurf}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \sum_{i=1}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^i$

c) $P(\text{früh. 5. W.}) = 1 - \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^i$

13)

a) $P(Z \leq 20) = P(Z \leq 20) - P(Z \leq 19) = 1{,}17 \cdot 10^{-3}$

b) $P(Z \leq 20) = 0{,}99919$

15) $p = 0{,}01$, $n = 200$; $q = 0{,}99$

~~$P(Z \leq 1) = P(Z=0) + P(Z=1) = \binom{200}{0} p^0 q^{200} + \binom{200}{1} p^1 q^{199} =$~~

~~$= 0{,}99^{200} + 200 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}99^{199} \approx 0{,}135 \; 0{,}134$~~

~~$P(Z \leq 1) = P(Z=0) + P(Z=1)$~~

$P(Z \leq 1) = P(Z=0) + P(Z=1) = 0{,}99^{200} + 200 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99^{199} = 0{,}405$

~~16)~~

17) $p = \frac{1}{6}$; $n = 6$

a) $P(Z=1) = \binom{6}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0{,}4$

b) $P(Z>0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0{,}67$

c) $P(Z \leq 1) = 0{,}4 + \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0{,}73$

HA: 92|12, 13, 15, 17

12) a)

$P(Z=0) = 0{,}56311$; $P(Z=1) = 0{,}18772$; $P(Z=2) = 0{,}28156$;

$P(Z=3) = 0{,}25029$; $P(Z=4) = 0{,}14594$; $P(Z=5) = 0{,}0584$

$P(Z=6) = 0{,}01622$; $P(Z=7) = 3{,}09 \cdot 10^{-3}$; $P(Z=8) = 3{,}9 \cdot 10^{-4}$;

~~$P(Z=8) \approx 0{,}28156$~~

$P(Z=9) = 3 \cdot 10^{-5}$; $P(Z=10) \approx 0$

b)

$P(1 \leq Z \leq 3) = P(Z \leq 3) - P(Z=0) = 0{,}71957$

c)

$P(1 < Z \leq 3) = P(Z \leq 3) - P(Z \leq 1) = 0{,}53185$

d)

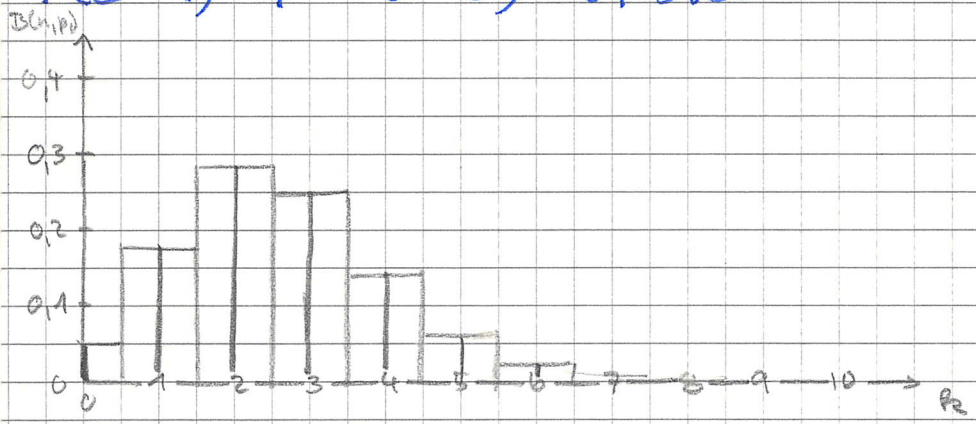
$P(1 \leq Z < 3) = P(Z \leq 2) - P(Z=0) = 0{,}46928$

e)

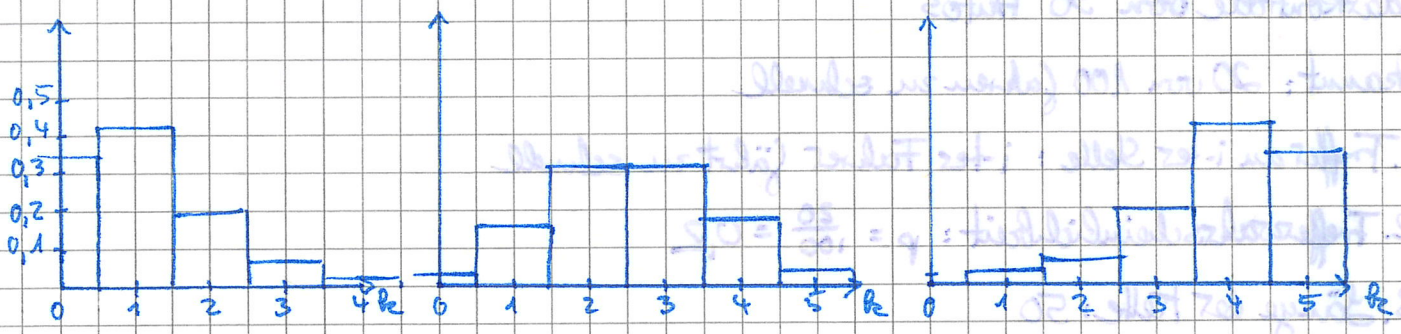
$P(1 < Z < 3) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq 1) = 0{,}28156$

f)

$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z=0) = 0{,}94369$



6) Histogramm Fläche: $\frac{P(Z=k)}{b_2-(b_2-1)}$



§.6. Bernoullisches Urnenmodell

- Urneninhalt → p
- Ziehen mit Zurücklegen
- Kettenlänge bestimmt Anzahl des Züge

HA: 92/12, 13, 15, 17

Beispiel:

Radarkontrolle von 50 Autos

Bekannt: 20 von 100 fahren zu schnell

a) 1. Treffer an i-ter Stelle: i-ter Fahrer fährt zu schnell

2. Trefferwahrscheinlichkeit: $p = \frac{20}{100} = 0{,}2$

3. Länge der Kette: 50

Z = Anzahl der zu schnellen Fahrer

b) genau 10 zu schnell

$P(Z=10) = P(Z \leq 10) - P(Z \leq 9) \approx 0{,}14$

c) keiner zu schnell

$P(Z=0) = \left(\frac{4}{5}\right)^{50} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-5}$

d) mind. 5

$P(Z \geq 5) = P(Z \leq 50) - P(Z \leq 4) \approx 1 - 0{,}1850$

e) mind 40 ordentliche Fahrer

$\Rightarrow$ höchstens 10 schnelle

$P(Z \leq 10)$

f) $P(\bullet\bullet\bullet\bullet) = 0{,}8^{46} \cdot 0{,}2^{4}$

§9 Testen

9.1 Beispiel zum Signifikanztest

gegeben: Kurs mit 10 Schülern

Behauptung: 50% der Schüler kaufen Biokost

p: Anteil des Biokostes

Z: Anzahl des Biokostes in der Stichprobe

Nullhypothese: $\{p = 0{,}5\} = H_0$

Zulässige Hypothese: $H = \{0; 0{,}1; 0{,}2; \ldots 0{,}9; 1{,}0\}$

Alternative $H_1 = H \setminus H_0$

Test: Befragen (= Ziehen) von 5 Schülern
mit Zurücklegen

Entscheidungsregel:

$Z \in \{2; 3\}$ = Annahmebereich A → H_0 wird nicht abgelehnt.

$Z \in \{0; 1; 4; 5\}$ = Ablehnungsbereich $\bar{A}$ → H_0 wird abgelehnt

$$A \cup \bar{A} = W_Z$$

Überblick:

H_0 \ Entscheidung	H_0 nicht abgelehnt	abgelehnt
wahr	richtige Entscheidung	Fehlentscheidung
falsch	Fehlentscheidung	richtige Entscheidung

Fehler: wahres H_0 wird abgelehnt: Fehler 1. Art — Risiko 1. Art

falsches H_0 wird nicht abgelehnt: Fehler 2. Art — Risiko 2. Art

Berechnung der Risiken:

Risiko 1. Art: $P^5_{0,5}(Z \in \bar{A}) = \cancel{P^5_{0,5}(Z \le 0) + P^5_{0,5}(Z \le 1) - P^5_{0,5}(Z \le 0) + P^5_{0,5}(Z \le 4) + P^5_{0,5}(Z}$

$p = 0,5$

$Z \in \{0,1,4,5\}$

$= P^5_{0,5}(Z \le 5) - P^5_{0,5}(Z \le 3) + P^5_{0,5}(Z \le 1) =$

$= 1 - 0.81250 + 0,18750 = 0,37500$

Risiko 2. Art:

H_0 falsch, d.h. $p \in H_1$ HA: Abi 81

$Z \in A$

$P^5_p(Z \in A) = P^5_p(Z \in \{2,3\}) = P^5_p(Z=2) + P^5_p(Z=3) =$

$P^5_{0,9}(Z \in A) = \binom{5}{2} \cdot 0,9^2 \cdot 0,1^3 + \binom{5}{3} \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^2 = 0,081$

Tabelle:

p	$P^5_p(Z \in A)$
0	0
0,1	0,081
0,2	0,256
0,3	0,441
0,4	0,576
~~0,5~~	~~0,576~~
0,6	~~0,441~~ 0,576
0,7	~~0,2~~ 0,441
0,8	0,256
0,9	0,081
1	0

S. 110 – S. 113

9.2 Variante des Signifikanztestes

Der einseitige Test

Beh.: Es sind höchstens 5 Biokostler unter den 10 Schülern

p: Anteil der Biokostler

1) $H_0 = \{p \leq 0{,}5\}$ $\quad H = \{0{,}0; 0{,}1; 0{,}2 \ldots 0{,}9; 1{,}0\}$

$H_1 = \{p > 0{,}5\} = H \setminus H_0$

2) Stichprobe: $n = 5$

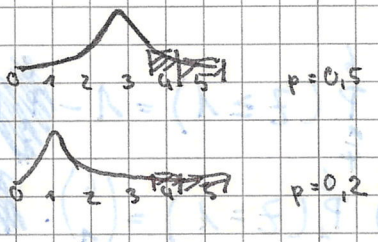
Z: Anzahl der Biokostler

3) Entscheidungsregel:

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

$\overline{A} = \{4, 5\}$

$A \cup \overline{A} = W_Z$



Risiko 1. Art ist bei der Gegenwahrscheinlichkeit am größten.

Risiko 1. Art

$\overset{5}{P}_{p \in H_0}(Z \in \overline{A}) = \overset{5}{P}_{0,5}(Z \in \overline{A}) = \overset{5}{P}_{0,5}(Z = 4) + \overset{5}{P}_{0,5}(Z = 5) = 0{,}15625 + 0{,}03125 =$

warum $p \in H_0 = 0{,}5$ wählen? S. 116/7

$= 0{,}1875$

116/7

Behauptung: der Schüler rät

p: Anteil der richtigen Antworten

~~$H = \{0{,}0; 0{,}04; 0{,}08 \ldots 1{,}0\}$~~ ~~$H = \{0, 1, 2 \ldots 25\}$~~

~~$H = \{0, 1, 2 \ldots 25\}$~~ $H_0 = \{p = 0{,}5\}$

Stichprobe: $n = 25$

Z = Anzahl der richtigen Antworten

Entscheidungsregel:

$A = \{0, 1, 2, 3 \ldots 15\}$

$\overline{A} = \{16, 17, 18 \ldots 25\}$



a) Risiko 1. Art: $\overset{25}{P}_{0,5}(Z \in \overline{A}) = \overset{25}{P}_{0,5}(Z \leq 25) - \overset{25}{P}_{0,5}(Z \leq 15) = 1 - 0{,}88524 = 0{,}11476$

b) $1 - \overset{25}{P}_{0,5}(Z \leq x) \leq 0{,}01$; $\overset{25}{P}_{0,5}(Z \leq x) \geq 0{,}99$; $x \geq 18$; $\overline{A} = \{18 \ldots 22, 23, 24, 25\}$

HAUSAUFGABE

81 - 11

1. $P(A) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

$P(B) = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$

$P(C) = 1 - \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4}\right) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

$P(D) = 3! \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{64}$

2.

a) $P^{6}_{\frac{1}{4}}(Z \geq 1) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^6 = 0,82202$

b) $P^{6}_{\frac{1}{4}}(Z = 1) = \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 0,35596$

3.

$P(\text{"wenigstens 1"}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)^n \geq 0,9$

$\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 0,1$

$n \ln \frac{3}{4} \leq \ln 0,1$

$n > \frac{\ln 0,1}{\ln 3/4}$

$n > 8,004$

$n > 9$

4. Gesucht: Risiko 1. Art

$p = \frac{1}{4}$ $\quad A = \{10, 11, \ldots 15\}$

$Z \in \overline{A}, Z \in \{0, 1, 2 \ldots 9, 16, 17, \ldots 50\}$

$n = 50$

$P^{50}_{\frac{1}{4}}(Z \in \overline{A}) = 1 - P^{50}_{0,25}(Z \in A) = P^{50}_{0,25}(Z \leq 50) - P^{50}_{0,25}(Z \leq 15) + P^{50}_{0,25}(Z \leq 9) =$

$= 1 - 0,83692 + 0,16368 =$

$= 0,32676$

H_0, H, H_1, Stichprobe ausführlich definieren

116/8

~~mehrals~~ höchstens

Behauptung: 10% aller Glühbirnen sind defekt

p = Anteil der defekten Gl.

$H_0 = \{p \leq 0{,}1\}$; $H_1 = \{p > 0{,}1\}$

Stichprobe: $n = 50$

Z = Anzahl der defekten Gl.

Entscheidungsregel: $\overline{A} = \{8, 9, 10, \ldots 50\}$

$A = \{0, 1, \ldots 7\}$

a) Risiko 1. Art: $P^{50}_{p \leq 0{,}1}(Z \geq 8) = 1 - P^{50}_{p=0{,}1}(Z \leq 7) = 1 - 0{,}87785 = 0{,}12215 \approx 12\,\%$

b) $H_0 = \{p = 0{,}2\}$

Risiko 2. Art: $P^{50}_{0{,}2}(Z \leq 7) = 0{,}19041 \approx 19\,\%$

c) $H_0 = \{p \leq 0{,}1\}$

Risiko 1. Art $\leq 0{,}05$

$P^{50}_{0{,}1}(Z \geq c) \leq 0{,}05$

$1 - P^{50}_{0{,}1}(Z \leq c-1) \leq 0{,}05$

$P^{50}_{0{,}1}(Z \leq c-1) \geq 0{,}95$

$c - 1 \geq 9$

$A = \{0, 1, 2 \ldots 9\}$

$\overline{A} = \{10, 11 \ldots 50\}$

Bereiche mit Variablen angeben!

d) $H_0 = \{p = 0{,}2\}$

Risiko 2. Art $\leq 0{,}5$

$P^{50}_{0{,}2}(Z \leq c) \leq 0{,}5$

~~$c \geq 4$~~ $c \leq 9$

~~$\overline{A} = \{6, 7 \ldots 50\}$~~ $\overline{A} = \{10, 11 \ldots 50\}$

~~$A = \{0, 1 \ldots 4\}$~~ $A = \{0, 1, 2 \ldots 9\}$

119/13

Behauptung: 80% der Voraussagen stimmen

$H_0 = \{p \geq 0{,}8\}$ p: Anteil der richtigen V. $H = [0;1]$

Stichprobe: $n = 20$

Z = Anzahl der richtigen Voraussagen

Entscheidungsregel: $A = \{15, 16 \ldots 20\}$

$\overline{A} = \{0, 1 \ldots 14\}$

a) Risiko 1. Art: $P^{20}_{0,8}(Z \leq 14) = 0{,}196579 \approx 20\,\%$

b) $H_0 = \{p = 0{,}5\}$

Risiko 2. Art: $P^{20}_{0,5}(Z \geq 15) = 1 - P^{20}_{0,5}(Z \leq 14) = 1 - 0{,}979579 \approx 80\,\%$

c) $H_0 = \{p = 0{,}8\}$

Risiko 1. Art $P^{20}_{0,8}(Z \leq c) \leq 0{,}01$

$c \geq 12$

$A = \{13, 14 \ldots 20\}$

$\overline{A} = \{0, 1, 2 \ldots 12\}$

$c \leq 11$; $A = \{12, 13, 14 \ldots 20\}$

$\overline{A} = \{0, 1, 2 \ldots 11\}$

d) $H_0 = \{p = 0{,}5\}$

Risiko 2. Art $P^{20}_{0,5}(Z \geq c)$

b) $H_0 = \{p = 0{,}5\}$

$P^{20}_{0,5}(Z \leq 14) = 0{,}057696$

b) $H_0 = \{p = 0{,}5\}$

$P^{20}_{0,5}(Z \leq 14) = 0{,}979321 \approx 98\,\%$

d) $P^{20}_{0,5}(Z \leq c) \geq 0{,}5$

$c \leq 10$

$A = \{11, 12 \ldots 20\}$

$\overline{A} = \{0, 1, 2 \ldots 10\}$

Binomialverteilung: Maximum bei p·n

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Hausmeister zu wenig kauft, weil 60 % aller Schüler Biokostler sind?

$$P_{0,6}^{5}(Z \in H) = P_{0,6}^{5}(Z \leq 3) = 0,66304 \approx 66\,\%$$

9.3. Spezialfall des Signifikanztests

Der Alternativtest

Beispiel: Sendung von 100 unbeschrifteten Widerständen
entweder 60 Stück à 100 Ω und 40 à 200 Ω
oder 40 Stück à 100 Ω und 60 à 200 Ω

Aufgabe: Konstruiere Test als Entscheidungshilfe 116/8 119/13

p = Anteil der 100 Ω-Widerstände

$H_0 = \{p = 0,6\}$; $H = \{0,6; 0,4\}$; $H_1 = \{0,4\}$

Stichprobe: $n = 20$

Z = Anzahl der 100 Ω-Widerstände

Entscheidungsregel: $A = \{11 \ldots 20\}$

$\bar{A} = \{0,1,2 \ldots 9,10\}$

Risiko 1. Art: es sind 60 à 100 Ω, wird aber falsch entschieden (Wahrscheinl.)

$$P_{0,6}^{20}(Z \leq 10) = 0,24466 \approx 24\,\%$$

Risiko 2. Art: $P_{0,4}^{20}(Z \geq 11) = 1 - P_{0,4}^{20}(Z \leq 10) = 1 - 0,87248 = 0,12752 \approx 13\,\%$

$\left[P^{20}_{0,6}(Z \leq \alpha) \leq 0{,}05 \right]$ (5% IRRTUMSWAHRSCHEINLICHKEIT)

$A = \{c+1, c+2, \ldots 20\}$

$\bar{A} = \{0, 1, \ldots c\}$

$P^{20}_{0,6}(Z \leq c) \leq 0{,}05$

Tabelle $\Rightarrow$ $c \leq 7$

$A = \{8, 9, 10 \ldots 20\}$

$\bar{A} = \{0, 1, \ldots 7\}$

Risiko 1. Art:

$P^{20}_{0,6}(Z \leq 7) = 0{,}02103 \approx 2\%$

Risiko 2. Art:

$P^{20}_{0,4}(Z \geq 8) = 1 - P^{20}_{0,4}(Z \leq 7) = 1 - 0{,}41\,589 = 0{,}58\,411 \approx 58\%$

$P^{20}_{0,6}(Z = 7) = \binom{20}{7} \cdot 0{,}6^{7} \cdot 0{,}4^{13} = 0{,}01456$

Abi 85 | V 3, VI 2,4

V 3)

Behauptung: (höchstens) 10% schlecht gefüllte Maßkrüge

p = Anteil der schlecht gefüllten M.

$H_0 = \{p \leq 0{,}1\}$; $H_1 = \{p > 0{,}1\}$

Stichprobe: $n = 50$; Z = Anzahl der schlecht gefüllten M.

a) Entscheidungsregel: $A = \{0, 1, 2 \ldots c\}$

$\bar{A} = \{c+1, c+2, \ldots 50\}$

Risiko 1. Art $P^{50}_{p \leq 0{,}1}(Z \geq c) \leq 0{,}03$

$1 - P^{56}_{0,1}(Z \leq c) \leq 0{,}03$

$P^{50}_{0,1}(Z \leq c) \geq 0{,}97$

$c \geq 9$

$A = \{0, 1, 2 \ldots 9\}$

$\bar{A} = \{10, 11, \ldots 50\}$

Risiko 1. Art $P^{50}_{0,1}(Z > 9) = 1 - P^{50}_{0,1}(Z \leq 9) = 1 - 0,97546 = 0,02454$

b) $A = \{0,1,2 \ldots 6\}$; $\bar{A} = \{7,8 \ldots 50\}$

Risiko 1. Art:

$P^{50}_{0,1}(Z > 6) = 1 - P^{50}_{0,1}(Z \leq 6) = 1 - 0,77023 = 0,22977 \approx 23\%$

VI 2)

$P($„mindestens einmal rot"$) \geq 90\%$

$1 - P($„keinmal rot"$) \geq 0,9$

$P($„kein rot"$) \leq 0,1$

$\left(1 - \frac{1}{3}\right)^n \leq 0,1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0,1$

$n \ln \frac{2}{3} \leq \ln 0,1$

$n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 2/3}$

$n \geq 5,67$

$n \geq 6$ (mind.)

Es muß 6 mal würfeln.

Z: Anzahl der Roten

$P(Z \geq 1) \geq 0,9$

$1 - P(Z < 1) \geq 0,9$

$P(Z = 0) \leq 0,1$

VI 4) Behauptung: Laplace-Würfel, „1 oder 4" tritt 50% auf

p = Anteil des Auftretens von „1 oder 4"

$H_0 = \{p = 0,5\}$; $H_1 = \{p \neq 0,5\}$

Stichprobe: $n = 100$; Z = Anzahl von „1 oder 4" in der Stichprobe

Entscheidungsregel: $A = \{44,45 \ldots 56\}$

$\bar{A} = \{0,1,2 \ldots 43, 57, 58 \ldots 100\}$

$P^{100}_{0,5}(Z \in A) = P^{100}_{0,5}(Z) = 1 - P^{100}_{0,5}(Z \leq 56) =$

$= P^{100}_{0,5}(Z \leq 56) - P^{100}_{0,5}(Z \leq 43) = 0,90333 - 0,09667 =$

$= 0,80666 \approx 80\%$

geg.: Urne, Kugeln 1...10

E: gleichzeitiges Ziehen von zwei Kugeln

$\Omega = \{\{x_1, x_2\} \mid x_{1,2} \in \{1...10\}, x_1 \neq x_2\}$

$|\Omega| = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$

A: "2 gerade Zahlen" $P(A) = \frac{\binom{5}{2}}{45} = \frac{10}{45}$

B "benachbarte Z." $P(B) = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$

C "2. nicht größer als 6" $P(C) = \frac{\binom{6}{2}}{45} = \frac{1}{3}$

$D := A \cup C$ $P(D) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$

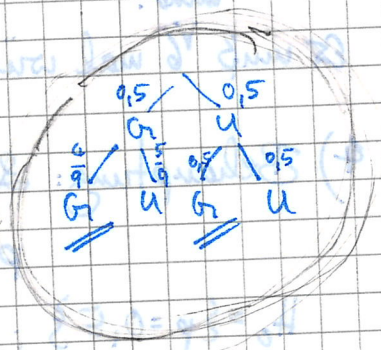
$P(A \cap C) = \frac{\binom{3}{2}}{45} = \frac{1}{15}$

$P(D) = \frac{10}{45} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{15}$

E: Ziehen von einer Kugel

Zahl ungerade => Kugel zurück, 2. ziehen

" gerade => 2. K. ohne Zurücklegen ziehen



E_1: 1. Zahl gerade $P(E_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

E_2: 2. Zahl gerade $P(E_2) = P(gg) + (ug) =$

$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$

Würfel: grün 1, 2, 3, 4

rot 1, 2

A "nur gleiche Zahlen"

B "nur verschiedene Z."

$P(A) = \left(\frac{2}{6}\right)^4 \left(\frac{2}{6}\right)^4 = \left(\frac{2}{6}\right)^4 + \left(\frac{2}{6}\right)^4 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \left(\frac{1}{6}\right)^4$

$P(B) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot 4!$

Ex.: Urne mit 5×A, 5×E, 3×S, 3×T

1. $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{A, E, S, T\}\}$

$P(\text{„AST“}) = \frac{5}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{3}{14} \approx 1{,}3\,\%$

$P(\text{„TAT“}) = \frac{3}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{2}{14} \approx 0{,}9\,\%$

2. ~~$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3$~~

$P(\text{„3 gleiche“}) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{16^3} \quad \frac{5! \cdot 13! \cdot 2}{2! \cdot 16!} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{16 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 2}{16 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{60 + 12}{15 \cdot 14 \cdot 16} = \frac{72}{16 \cdot 15 \cdot 14} \approx 3{,}9\,\%$

3. $\Omega = \{(x_1 \ldots x_5) \mid x_i \in \{1 \ldots 16\}\}$; $|\Omega| = 16^5$

a) $P(A) = \binom{16}{2} \cdot \binom{13}{3}$:

A: $P(S) = \frac{3}{16}$ $\quad p = \frac{3}{16}$, $n = 5$

$\overset{5}{\underset{\frac{3}{16}}{P}}(Z = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^2 \cdot \left(\frac{13}{16}\right)^3 \approx 18{,}9\,\%$

B: $p = \frac{6}{16}$

C: $P(\text{„TASSE“}) = \frac{3}{16} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{5}{16} \approx 0{,}06\,\%$

~~8)~~ V, VI

3b) $P(\text{"SEE"}, \text{"ESE"}, \text{"EES"}) = \frac{3}{16} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{5}{16} \cdot 3 \approx 5{,}5\,\%$

c) Bernoulli-Kette: Treffer a.d. i-ten Stelle: a.d. i-ten Stelle C

$p = \frac{1}{17}$

$P(\text{„mind. 1 C“}) > 0{,}9$

$1 - P(\text{„kein C“}) > 0{,}9$

$\left(1 - \frac{1}{17}\right)^n < 0{,}1$

$n \ln \frac{16}{17} < \ln 0{,}1$

$n > \frac{\ln 0{,}1}{\ln \frac{16}{17}}$

$n > 37{,}9\ldots$

$n \geq 38$

Man muß mind. 38 mal würfeln.

VI.

1. a) $P(A) = \frac{6}{12} = 0,5$

$P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

A und B sind vereinbar, unabhängig

b) $P(\text{Ereignis}) = \left(\frac{1}{12}\right)^5 \cdot 5! \approx 0,05\%$

c) Treffer a. d. i-ten Stelle: i-ter Wurf 10

$p = \frac{1}{12}$ Z: Anzahl der 10er

$n = 20$

$$P^{20}_{\frac{1}{12}}(Z \geq 2) = 1 - P^{20}_{\frac{1}{12}}(Z \leq 1) \approx 0,5054 \approx 50,5\%$$

2. a)

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1,1	2,1	22	23	33	34	44	54	55	65	66	76	~~77~~	~~87~~	106	116	126
	1,2	31	32	42	43	53	45	64	56	75	85	86	96	115	125	
		13	41	24	52	35	63	46	74	84	94	95	105	124		
			14	51	25	62	36	73	83	93	103	104	114			
				15	16	26	72	82	92	102	112	113	123			
					61	71	81	91	101	111	121	122				

$\frac{1}{72}$ $\frac{2}{72}$ $\frac{3}{72}$ $\frac{4}{72}$ $\frac{5}{72}$ $\frac{6}{72}$ $\frac{6}{72}$ $\frac{6}{72}$ $\frac{6}{72}$ $\frac{6}{72}$ $\frac{6}{72}$ $\frac{6}{72}$ $\frac{5}{72}$ $\frac{4}{72}$ $\frac{3}{72}$ $\frac{2}{72}$ $\frac{1}{72}$

b) q

$\frac{6}{72} \cdot 6 = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$

Behauptung: Spiel wird zu 50% gewonnen

p: Anteil des gewonnenen Spiele

$H_0 = \{p = \frac{1}{2}\}$; $H = [0;1]$; $H_1 = H \setminus H_0$

Stichprobe: Z = Anzahl des gewonnenen Spiele

$n = 10$

$A = \{4,5,6\}$; $\overline{A} = \{1,2,3,0,7,8,9,10\}$

Risiko 1. Art: $P^{10}_{\frac{1}{2}}(Z \in \overline{A}) = 1 - \cancel{P^{10}_{\frac{1}{2}}(Z \in A)} = 1 - P^{10}_{0,5}(Z \leq 6) + P^{10}_{0,5}(Z \leq 3) =$

$= 1 - 0,82813 + 0,17188 = 0,17187 +$

$0,17188 = 0,34375 \approx 34\%$

Analysis

§1. Differentiationsregeln

- Summenregel

$f(x) = 3x^7 - 5x^2 + \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x} - 4$

$f'(x) = 21x^6 - 10x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} + x^{-\frac{3}{2}} - 5x^{-2}$

$f(x) = x^u \quad f'(x) = u \cdot x^{u-1}$

$f(x) = \sin kx$	$f'(x) = k \cdot \cos kx$
$f(x) = \cos kx$	$f'(x) = -k \cdot \sin kx$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a$
$= e^{\ln a^x}$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
$= e^{x \ln a}$	
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

$\ln e^x = x$

$e^{\ln x} = x$

$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

- Produktregel

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$

Beispiel:

$f(x) = (\sqrt{x} \cdot \sin x)$

$f'(x) = \sqrt{x} \cdot \cos x + \sin x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- Kettenregel

$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Beispiel:

$f(x) = \cos(3x^2 - 5x)$

$f'(x) = -\sin(3x^2 - 5x) \cdot (6x - 5)$

$f(x)$

$h(x) = \sqrt{1 - \sin x}$

$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-\sin x}} \cdot (-\cos x)$

- Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v \cdot u' - v' \cdot u}{v^2} = \left(\frac{NAZ - ZAN}{N^2}\right)'$$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x}{1 + x^2}$$

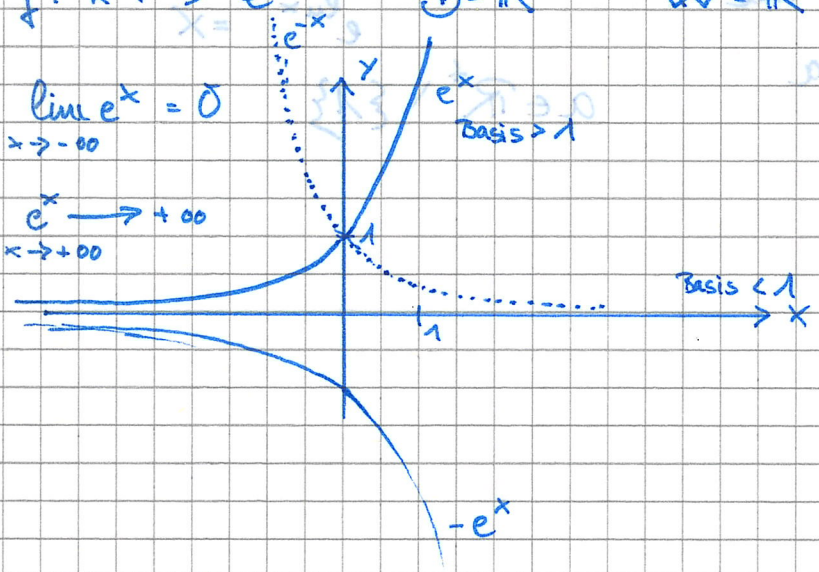
$$f'(x) = \frac{-(2x^2-5x)2x + (1+x^2)(4x-5)}{(1+x^2)^2} = \frac{4x - 5 + 4x^3 - 5x^2 - 4x^3 + 10x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{5x^2 + 4x - 5}{(1+x^2)^2}$$

§2. e- und ln-Funktion

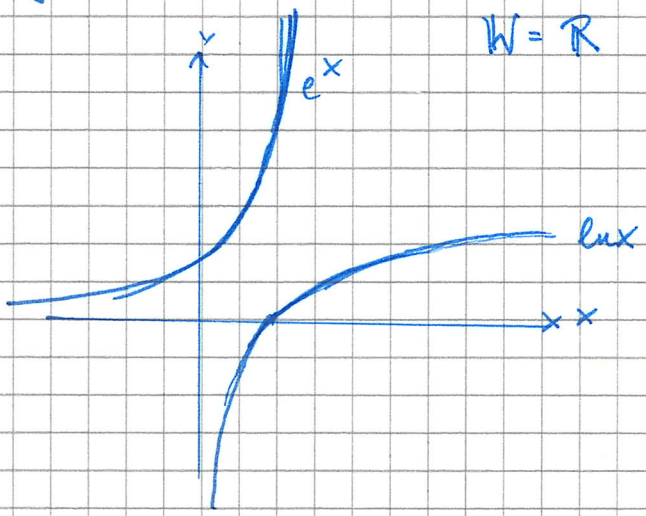
$f: x \mapsto e^x \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$e^x \to +\infty$ für $x \to +\infty$



$f^{-1}: x \mapsto \ln x \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$



$\ln x \to -\infty$ für $x \to 0^+$

$\ln x \to +\infty$ für $x \to \infty$

243 | 5g, k, m; 8a, b, c;

245 | 3b, c; 4d; 5h-k

e^{x-1} Verschiebung nach rechts, $e^x - 1$ nach unten

HA: 85 Abi I/1

1. Kurvendiskussion: $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$; $D_f = \mathbb{R}$

a) Schnittpunkte mit der x-Achse

$\frac{e^x - 2}{e^x + 1} = 0$

$e^x - 2 = 0$; $e^x = 2$; $x \ln e = \ln 2$; $x = \ln 2$ $\quad S(\ln 2 \mid 0)$

Schnittpunkte mit der y-Achse

$\frac{e^0 - 2}{e^0 + 1} = \frac{-1}{2}$ $\quad S(0 \mid -\frac{1}{2})$

e^x streng monoton ($\Rightarrow -2, +1$ keine Rolle)

$x \to +\infty$; $x \to -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 2}{e^x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 2e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$ $\quad (e^{-x} \to 0$ f. $x \to +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 2}{e^x + 1} = \frac{0 - 2}{0 + 1} = -2$ $\quad (e^x \to 0$ f. $x \to -\infty)$

Asymptoten: $y = 1$; $y = -2$

b) $f'(x) = \frac{(e^x + 1)e^x - (e^x - 2)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x)^2 + e^x - (e^x)^2 + 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{3e^x}{(e^x + 1)^2}$ $\quad \begin{matrix} \} e^x > 0 \\ \} > 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ streng monoton steigend

$\frac{3e^x}{(e^x + 1)^2} = 0$; $3e^x = 0$; $e^x = 0$?

stetig, weil Diffbar

(stetig, streng monoton, Asympt.)

$W =]-2; 1[$

c) $f''(x) = \frac{(e^x + 1)^2 3e^x - 3e^x \cdot 2(e^x + 1)e^x}{(e^x + 1)^4} = \frac{((e^x)^2 + 2e^x + 1)3e^x - 6(e^x)^2(e^x + 1)}{(e^x + 1)^4} =$

$= \frac{3(e^x)^3 + 6(e^x)^2 + 3e^x - 6(e^x)^3 - 6(e^x)^2}{(e^x + 1)^4}$ $\quad 3e^x(1 - e^{2x})$

$= \frac{(e^x + 1)^3 e^x}{(e^x + 1)^4} = \frac{(e^x + 1)3e^x - 6(e^x)^2}{(e^x + 1)^3} = \frac{3(e^x)^2 + 3e^x - 6(e^x)^2}{(e^x + 1)^3} =$

$= \frac{3e^x(e^x + 1 - 2e^x)}{(e^x + 1)^3} = \frac{3e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$

$f''(x) = 0$

$3e^x(1 - e^x) = 0$

1. $e^x = 1$; $x = 0$

$f''(x) < 0$ f. $e^x < 1$; $x < 0$ rechtsg.

$f''(x) > 0$ f. $e^x > 1$; $x > 0$ linksg.

$\Rightarrow$ Wendep. $\quad (f''(x) \neq 0$ an der Stelle $)$

Wendepunkt $W(0|-\frac{1}{2})$

Wendetangente:

$y = f'(0) \cdot x + f(0) = \frac{3}{4} x - \frac{1}{2}$

$y = mx + t$

$-\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot 0 + t \Rightarrow -\frac{1}{2}$

d)

x	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	∞
f(x)	-1,64	-1,19	0,19	0,64	0,86	0,95	-0,5	

unbestimmtes Integral

bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)dx$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i = c$

Integralfkt. $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Stammfkt. $F'(x) = f(x)$

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

84 Abs. II

$f(x) = \ln \frac{x-1}{2x}$

1.a) Definitionsbereich: $2x \neq 0 \wedge \frac{x-1}{2x} > 0$

$\Rightarrow x \neq 0 \wedge 1 \quad D_f = \mathbb{R} \setminus [0;1]$

$\lim_{x\to\infty} \ln \frac{x-1}{2x} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \quad ; y = -\ln 2$

$\lim_{x\to 0} \ln \frac{x-1}{2x} \to +\infty \quad ; x = 0$

$\lim_{x\to 1+} \ln \frac{x-1}{2x} \to -\infty \quad (\lim_{x\to 1+} \frac{x-1}{2x} \to 0) \quad ; x = 1$

b) $f'(x) = \frac{2x \cdot 1}{x-1}$ (

$f'(x)$

$f(x) = \ln \frac{x-1}{2x} = \ln\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\right)$

$f'(x) = \frac{2x \cdot 1}{x-1} \left(-\frac{1}{2} x^{-2}\right)$

~~b) $f(x) = \frac{2x}{x-1} \cdot \frac{(x-1)2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \cdot \frac{2x(x-1)}{(2x)^2}$~~

b) $f'(x) = \frac{2x}{x-1}\left(\frac{2x-2(x-1)}{(2x)^2}\right) = \frac{4x}{4x^2(x-1)} = \frac{1}{x^2-x}$ ✓

Extrema: $\frac{1}{x^2-x} \neq 0$ f. $x \in D_f$ $\Rightarrow$ keine Extrema

$f''(x) = \frac{(x^2-x)\cdot 0 - 1\cdot(2x-1)}{(x^2-x)^2} = \frac{1-2x}{(x^2-x)^2}$ $f > 0$

$f''(x) < 0$ für $1-2x < 0,\ x > \frac{1}{2}$

$f''(x) > 0$ für $1-2x > 0;\ x < \frac{1}{2}$

da $\frac{1}{2} \notin D_f$ $\Rightarrow$ kein Wendepunkt

c) $f'(x) > 0$; G_f streng monoton steigend

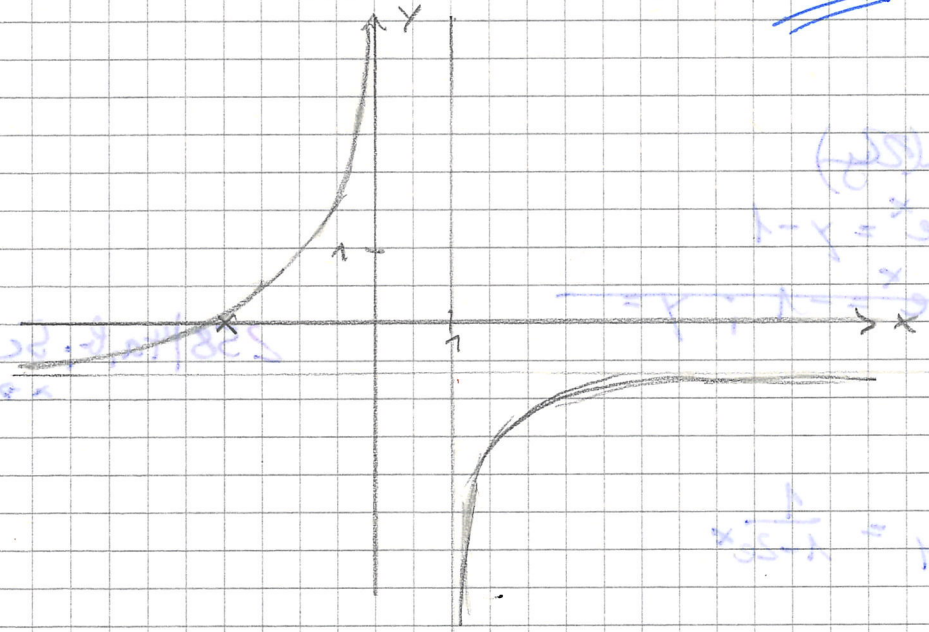
$f(x)$ ist stetig

Asymptote bei $y = -\ln 2$

$W_f = \mathbb{R} \setminus \{-\ln 2\}$

Nullstelle: $\ln\frac{x-1}{2x} = 0$; $\frac{x-1}{2x} = 1$; $x = -2$

d)



2. a) $F(x)$ Stammfkt. von $f(x)$ $\Rightarrow$ $F'(x) = f(x)$

$F'(x) = \begin{cases} x\cdot f(x) - \ln(x-1) & \text{f. } x > 1 \\ x\cdot f(x) - \ln(1-x) & \text{f. } x < 1 \Rightarrow x < 0 \quad (D_f) \end{cases}$

~~1. Fall $x > 1$~~

~~$F'(x) = f(x) - \frac{1}{(x-1)}$~~

~~$F(x) = x\frac{x-1}{2x} - \ln(x-1) = \frac{x^2-1}{2x} - \ln(x-1)$~~

~~$F'(x) =$~~

1. Fall. $x > 1$

$F'(x) = f(x) + x \cdot f'(x) - \frac{1}{x-1} = f(x) + \frac{x}{x^2-x} - \frac{1}{x-1} = f(x)$

2. Fall $x < 0$

$F'(x) = f(x) + x \cdot f'(x) \frac{-1}{x(1-x)} = f(x)$

b) $A = -\int_2^u f(x)dx = -\left[x \cdot \ln\frac{x-1}{2x} - \ln(x-1)\right]_2^u =$

$= -\left[u \ln\frac{u-1}{2u} + \ln(u-1) - 2\ln\frac{1}{4} + \ln 1\right] =$

$= -u \ln\frac{u-1}{2u} + \ln(u-1) + 2\ln\frac{1}{4} - \ln 1 =$

$= -2\ln 4 + \ln(u-1) - u\ln\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{u}\right)^{-1}$

$-u\left[\ln(u-1) - \ln(2u)\right] =$

$= \ln(u-1) - 2\ln 4 - u\ln(u-1) + u\ln 2u =$

$= -4\ln 2 + u\ln 2u + (1-u)\ln(u-1)$

3. $y = \ln\frac{x-1}{2x}$

$x = \ln\frac{y-1}{2y}$

$e^x = \frac{y-1}{2y} \; / \cdot 2y$

$2ye^x = y - 1$

$2ye^x - y = -1$

$y(2e^x - 1) = -1$

$y = -\frac{1}{2e^x - 1} = \frac{1}{1-2e^x}$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{1-2e^x}$

$D_{f^{-1}} = W_f \; ; \; W_{f^{-1}} = D_f$

258/4a, b; 5c

$x \to \pm\infty$

4a) $f: x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$

$f'(x) = \frac{(x-1)\cdot 2 - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim_{x \to 1+} \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow$ $\lim_{x \to 1-} \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow$

$\frac{-3}{(x-1)^2} \neq 0 \Rightarrow$ keine waagr. Tangenten

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$

4b) $f(x) = \frac{x-3}{(x-2)^2}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - (x-3)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)-(2x-6)}{(x-2)^3} =$

$= \frac{4-x}{(x-2)^3}$

$\frac{4-x}{(x-2)^3} = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow$ waagr. Tangente bei $x = 2$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-3}{(x-2)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-3}{x^2-4x+4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{4x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{3}{x^2}} =$

5c) $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f'(x) = \frac{(2-x)2x + x^2}{(2-x)^2} = \frac{x^2+2x-2x^2}{(2-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(2-x)^2} = \frac{x}{2-x} = \frac{4x-x^2}{(2-x)^2}$

$4x - 2x^2 + x^2$

~~$\Rightarrow$ VAC~~

$f''(x) = \frac{2-x+x}{(2-x)^2} = (\frac{2}{2-x})^2 = \frac{8}{(2-x)^3}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\frac{2}{x}-1} \Rightarrow -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\frac{2}{x}-1} \Rightarrow +\infty$

§3. Rationale Funktionen

ges.: $f(x), g(x) \neq 0$ Polynomfkt.

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

$r: x \mapsto r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ heißt rationale Fkt. mit $\mathbb{D}_r = \mathbb{R} \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$

a) $\mathbb{D}$, NSt.

$N(x) = 0$: $x^2 + x - 6 = 0 \mid N$: (Nenner)

$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$

$x_1 = 2$; $x_2 = -3$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2, -3\}$

Nullstellen: $x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_{3/4} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$

$x_3 = 2$; $x_4 = 1$

$N(1 \mid 0)$, N_2 nicht in $\mathbb{D}$ $\Rightarrow$ nicht existent

b) Zerlegen in Faktoren und kürzen

$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x-1}{x+3}$ mit $x \in \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$

bei -3: Pol

2: stetig behebbare Def.lücke, da gekürzt werden kann

c) Verhalten an den Rändern (Division durch höchste Potenz des Nenners)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}} = 1$$

$\Rightarrow$ waagrechte Asymptote $y = 1$

$\lim_{x\to -3}$ $f(x) \xrightarrow[x\to -3+]{} \mp\infty$

$f(x) \xrightarrow[x\to -3-]{} +\infty$

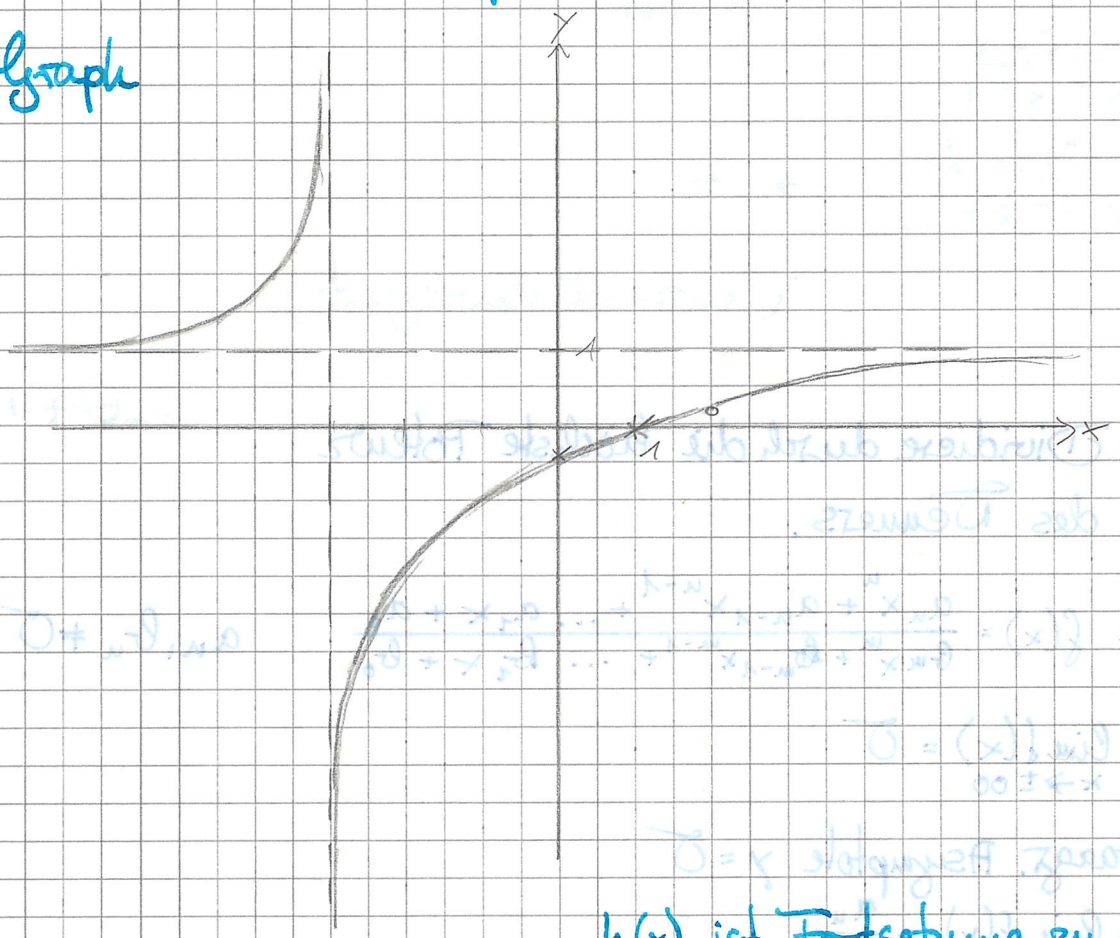
$\Rightarrow$ senkrechte Asymptote $x = -3$

(Definitionslücke: Pol bei $x = -3$)

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{5}$$

$\Rightarrow$ stetig behebbare Def.lücke bei $x = 2$

d) Graph



$h(x)$ ist Fortsetzung zu $g(x)$, wenn:

$\mathbb{D}_g \subset \mathbb{D}_h$

$h(x) = g(x)$ für $x \in \mathbb{D}_g$

e) stetige Fortsetzung

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\} \\ \frac{1}{5} & x = 2 \end{cases}$$

$$f^*(x) = \frac{x-1}{x+3} \qquad D^* = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

3.2 Verhalten im Unendlichen

$$f_1(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$f_2(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{7x^2 + 5x - 3}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_2(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{7 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}} = \frac{3}{7}$$

$$f_3(x) = \frac{2x^4 + 5x^2 - 4}{3x^2 - x + 1}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + 5 - \frac{4}{x^2}}{3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \to \infty$$

(bestimmt divergent)

Verfahren: Dividiere durch die höchste Potenz des Nenners. 26413

allgemein: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots b_1 x + b_0}$ $\quad a_n, b_m \neq 0$

1) $n < m$: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

$\Rightarrow$ waagr. Asymptote $y = 0$

2) $n = m$: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$

$\Rightarrow$ waagr. Asymptote $y = \frac{a_n}{b_m}$

3) $n > m$: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \to \pm\infty$

$\Rightarrow$ keine waagr. Asymptote (bestimmt divergent)

HA: 264/3

$$f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+8}$$

a) $x^2-6x+8=0$

$x^2-6x+9-1=0$

$(x-3)^2-1=0$

$x-3=\pm 1$; $x_1=4$; $x_2=2$

$\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{4,2\}$

NSt.: $x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$ („doppelte NSt.")

$N(2|0)$ existiert nicht

b) $f(x)=\frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\frac{x-2}{x-4}$

$x=2$: stetig behebbar

$x=4$: Pol

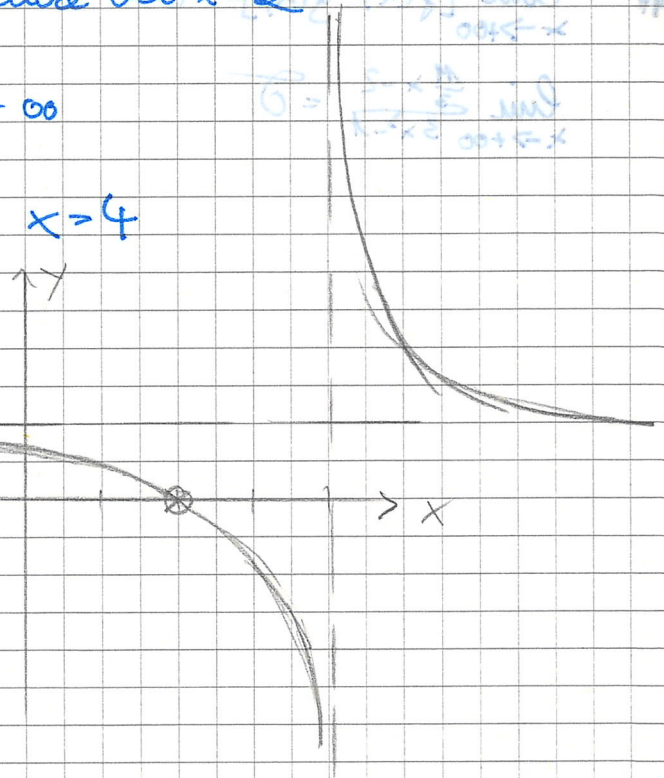
c) Verhalten an den Rändern

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x}}=1$ $\Rightarrow$ waagrechte Asymptote $y=1$

$\lim\limits_{x\to 2^{\pm}} f(x)=0$ $\Rightarrow$ stetig behebb. Def.lücke bei $x=2$

$\lim\limits_{x\to 4+} f(x)\to+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to 4-} f(x)\to-\infty$

$\Rightarrow$ senkrechte Asymptote $x=4$



d) $f^*(x)=\begin{cases} f(x) & \text{für } x\in\mathbb{R}\setminus\{4,2\} \\ 0 & \text{für } x=2 \end{cases}$

$f^*(x)=\frac{x-2}{x-4}$ $\quad\mathbb{D}^*=\mathbb{R}\setminus\{4\}$

Beispiele:

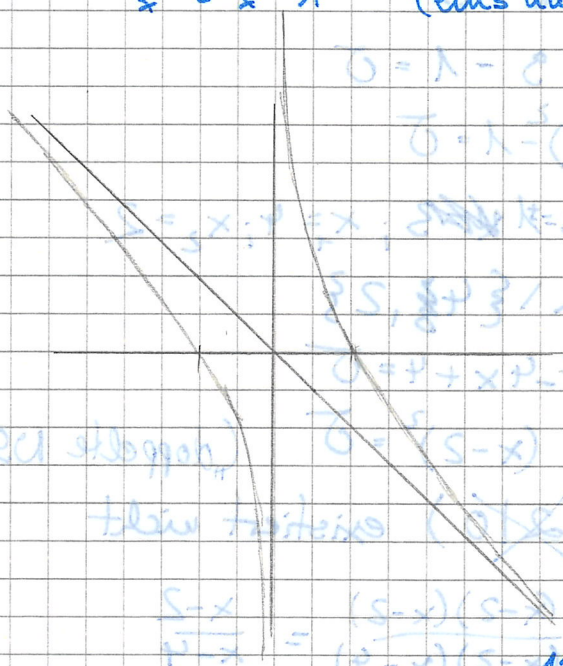
$f_1(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \lim_{x \to \pm\infty} f_1(x) = 0$

$f_2(x) = \frac{x+1}{x}$ $\quad \lim_{x \to \pm\infty} f_2(x) = 1$

$\frac{x+1}{x} = \frac{1}{x} + 1$ (eins nach oben)

$f_3(x) = \frac{1-x^2}{x}$: $\quad \lim_{x \to +\infty} f_3(x) \to -\infty$

$= \frac{1}{x} - x$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f_3(x) \to +\infty$



Schräge Asymptote:

$y = -x$

3.3

Polynomdivision:

$$f(x) = \frac{2x^4+3x-2}{3x^3-1} = (2x^4+3x-2) : (3x^3-1) = \frac{2}{3}x + \frac{\frac{11}{3}x-2}{3x^3-1}$$

$-(2x^4 - \frac{2}{3}x)$

$\frac{11}{3}x - 2$

$\Rightarrow$ schräge Asymptote $y = \frac{2}{3}x$

Nachweis der schrägen Asymptote $y = g(x)$:

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{11}{3}x - 2}{3x^3-1} = 0$

264 / 5, 265 / 6a, 11a

HA: ~~258~~ 264/5

a) $f(x) = \frac{8x^3 - 5x + 1}{2x^3 + 2}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 4$

b) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{-x^3 + x}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) \to -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) \to +\infty$

c) $f(x) = \frac{x+1}{2x^2 - 8}$

$\lim_{x \to \pm\infty} = 0$

265/

6a) $f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2}{x^3 - 4x^2 + 4x}$; $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$

$x^3 - 4x^2 + 4x = 0$

$x(x^2 - 4x + 4) = 0$

$x(x-2)^2 = 0$

⇓ Pol 2. Ordnung

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 0} f(x) =$

$\frac{2x^3 - 5x^2}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \frac{(x-2)(2x^2-3)}{\ldots}$

$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 2^{\pm}} f(x) \to -\infty$

11a)

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $\quad f'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot 0 - 1(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ $\quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Extrema: $x = 0$

$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2 \cdot (-2) - (-2x)\, 2(x^2+1) \cdot 2}{(x^2+1)^4}$

$f''(0) = \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt $\Rightarrow$ Maximum

$f(0) = 1$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \Rightarrow$ sei waagrechte Asymptote $y = 0$

$\Rightarrow$ (Stetigkeit vorausgesetzt) $\mathbb{W}_f =]0; 1]$

Pol 2. Ordnung $x=-1$ ($\Rightarrow$ kein Vorzeichenwechsel)

NS $x=-1$

waagr. Asymp. $y=\frac{2}{3}$

stetig behebb. Def.lücke: $x=-1$

$$f(x)=\frac{2(x-1)(x+1)x}{3(x+2)^2(x+1)} \qquad f^*(x)=\frac{2(x-1)x}{3(x+2)^2}$$

Beispiele:

$$f_1(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x-2}= \qquad D_{f_1}=\mathbb{R}\setminus\{1,-2\} \qquad \text{FORMEL!}$$

$$=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}$$

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} f(x) \Rightarrow$ stetig behebb.

$$\lim_{x\to 1\pm} f(x)=\lim_{x\to 1\pm}\frac{x+1}{x+2}=\frac{2}{3}$$

~~$\lim\limits_{x\to -2}$~~ $f(x)\xrightarrow[x\to -2-]{}+\infty$, $f(x)\xrightarrow[x\to -2+]{}-\infty$ $\Rightarrow$ Pol bei $x=-2$

senkrechte Asymptote

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \Rightarrow$ waagrechte Asymp. $y=1$

$$f_2(x)=\frac{3x^2}{x-2} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$$

$$3x^2:(x-2)=(3x+6)+\frac{12}{x-2}$$

$$-(3x^2-6x)$$

$$+6x$$

$$-(6x-12)$$

$$+12$$

$\Rightarrow$ schräge A. $g(x)=3x+6$

HA: 271/1b,f,k

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-g(x)=0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{12}{x-2}=0$$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ $\quad D_{f\,max} = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ keine senkrechte A.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \to 1$ $\Rightarrow$ waagrechte A. $y = 1$

NST: $x = 0$ (doppelte NST.)

$f(-x) = f(x)$ $\Rightarrow$ Symmetrie bez. y-Achse

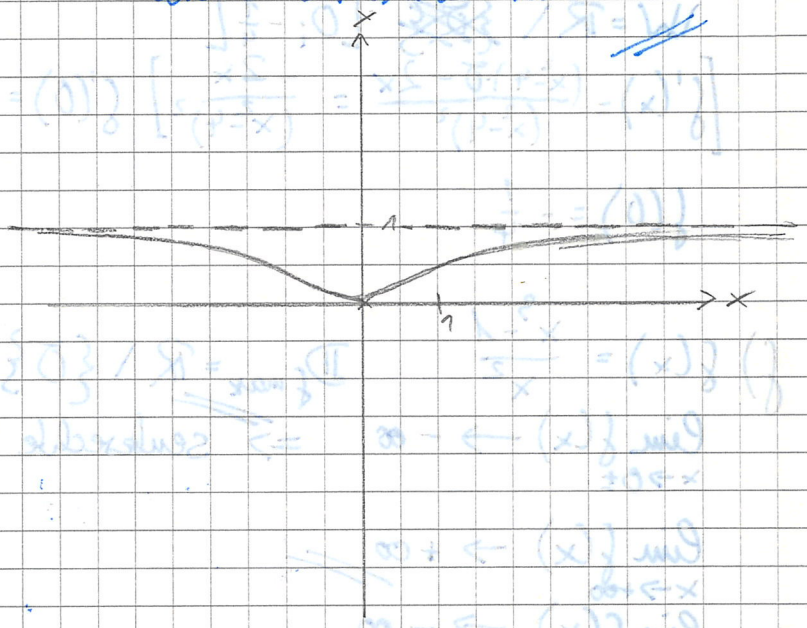
$f'(x) = \frac{(x^2+1)2x - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2 \cdot 2 - 2x \cdot 4(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4}$

$f''(0) = 2$ $\Rightarrow$ Einbaugekrümmt $\Rightarrow$ ~~Minimum Maximum~~ Minimum

$W_{f\,max} = [0;1[$



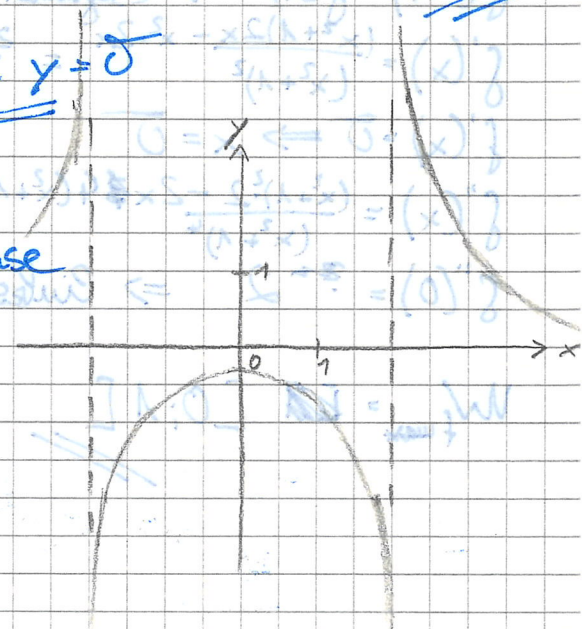
271) 1bfk

b) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ $\quad D_{f\,max} = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \to +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \to -\infty$ $\Rightarrow$ Pol bei $x = 2$ $\Rightarrow$ senkrechte $\Rightarrow$ Asymptoten

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) \to -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) \to +\infty$ $\Rightarrow$ Pol bei $x = -2$ $\Rightarrow x = 2, x = -2$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ $\Rightarrow$ waagrechte Asymptote $y = 0$



NSt: keine

$f(x) = f(-x)$ $\Rightarrow$ Symmetrie bezüglich y-Achse

$W = \mathbb{R} \setminus \cancel{\{0\}}$ $[0; -\frac{1}{4}[$

$\left[f'(x) = \frac{(x^2-4)\cdot 0 - 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x}{(x^2-4)^2}\right]$ $f'(0) = 0$

$f(0) = -\frac{1}{4}$

f) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$ $\quad D_{f\,max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0\pm} f(x) \to -\infty$ $\Rightarrow$ senkrechte A. $x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \to -\infty$

NSt.: $x = 1$

$(x^3-1) : (x^2) = x - \frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow$ schräge A. $y = x$

$-(x^3)$

-1

$f'(x) = \frac{x^2 3x^2 - \cancel{x^3}(x^3-1)2x}{x^4} = \frac{3x^4 - 2x^4 + 2x}{x^4} = \frac{x^3+2}{x^3}$

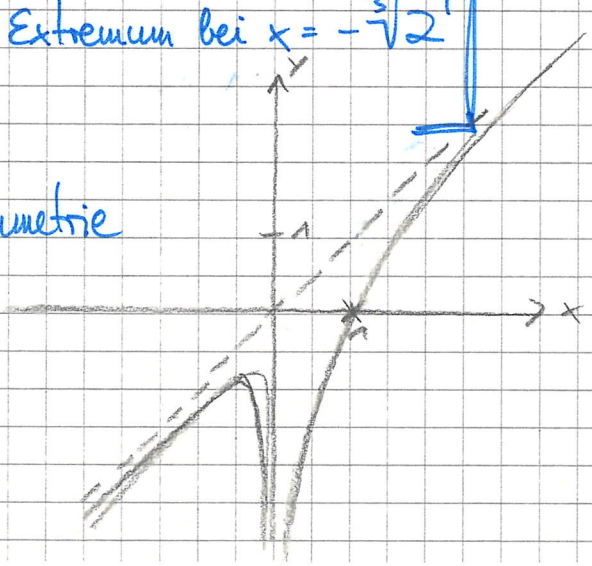
$f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 = -2 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{2}$ $\Rightarrow$ Extremum bei $x = -\sqrt[3]{2}$

$f(-\sqrt[3]{2}) =$

$-f(x) = -\frac{x^3-1}{x^2} = \frac{1-x^3}{x^2} \neq x^3$ $\Rightarrow$ keine Symmetrie

(nur 1 Nullstelle!!!)

$W = \mathbb{R}$



$$x_{1/2} = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 8^2}}{-4} = \frac{-17 \pm 15}{-4}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \; ; \; x_2 = 8$$

Bereiche:

$x < -2$	: $f'(x) < 0$	$\Rightarrow$	$f(x)$ streng monoton fallend	
$-2 < x < \frac{1}{2}$	: $f'(x) < 0$	$\Rightarrow$	$f(x)$ " " "	} Minimum $x = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} < x < 2$	: $f'(x) > 0$	$\Rightarrow$	$f(x)$ " " steigend	$\left(\frac{1}{2} \mid 5\right)$
$2 < x < 8$	: $f'(x) \geq 0$	$\Rightarrow$	$f(x)$ " " [illegible]	} Maximum
$8 < x$	: $f'(x) < 0$	$\Rightarrow$	$f(x)$ " " fallend	$(8 \mid 1{,}25)$

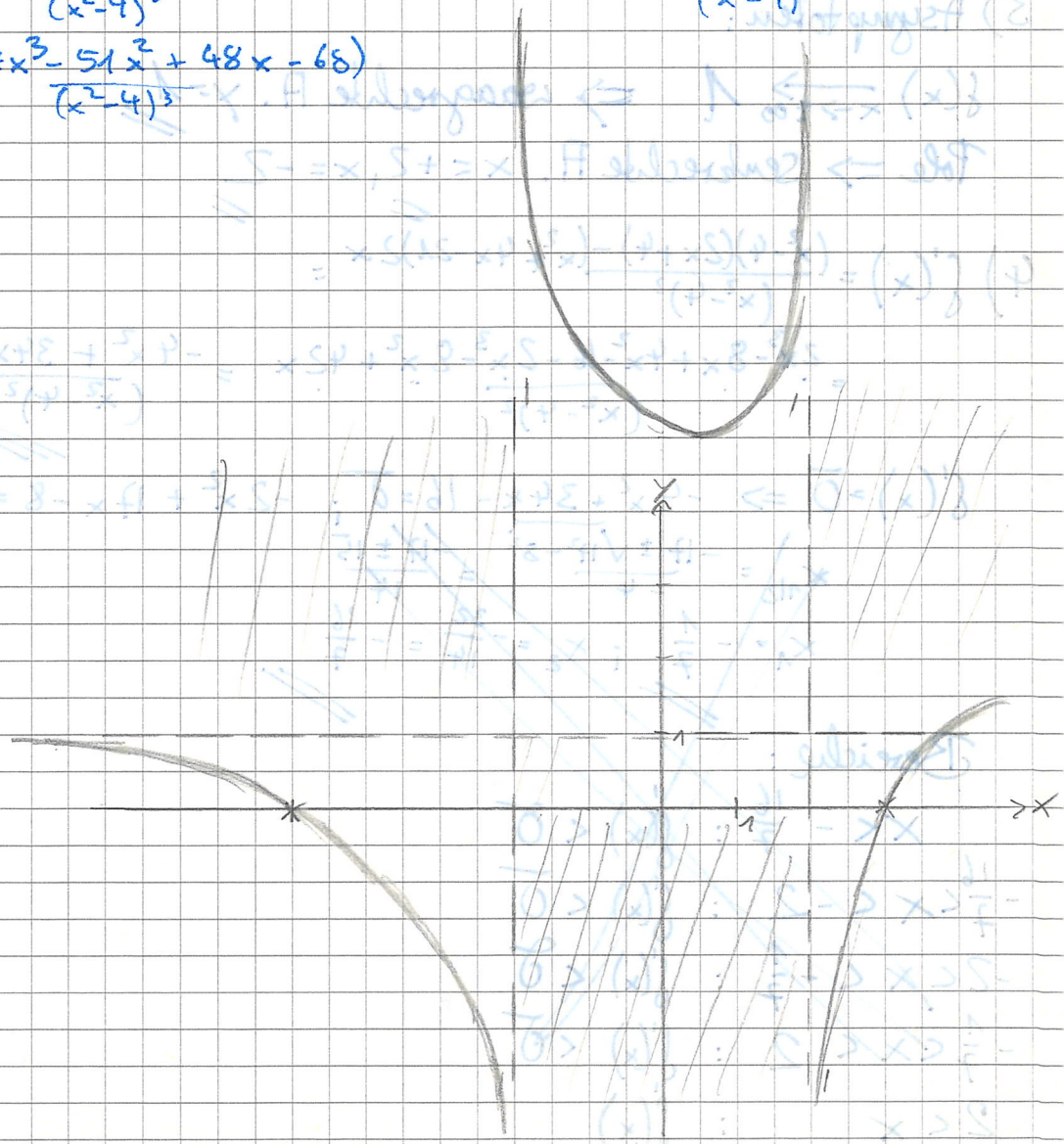
5) $$f''(x) = \frac{(x^2-4)^2(-8x+34) - 2(x^2-4)2x(-4x^2+34x-16)}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{(x^2-4)(-8x+34) - 4x(-4x^2+34x-16)}{(x^2-4)^3} =$$

$$= \frac{-8x^3+34x^2+32x-4\cdot 34+16x^3-4\cdot 34x^2+4\cdot 16x}{(x^2-4)^3} = \frac{8x^3-102x^2+96x-136}{(x^2-4)^3} =$$

$$= \frac{4(2x^3 \; 2(4x^3-51x^2+48x-68)}{(x^2-4)^3}$$

11,8588989



$$f(x) = \frac{x^2+4x-21}{x^2-4} = \frac{(x+7)(x-\frac{21}{7})}{(x-2)(x+2)}$$

1) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

NST.: $x^2+4x-21 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+84}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2}$$

$x_1 = -7$; $x_2 = +3$

Pole 1. Ordnung (⇒ Vorzeichenwechsel) bei $x = -2$, $x = 2$

NST. 1. Ordnung bei $x = -7$, $x = 3$

$f(x) \xrightarrow[x \to 2+]{} -\infty$

$f(x) \xrightarrow[x \to 2-]{} +\infty$

$f(x) \xrightarrow[x \to -2-]{} -\infty$

$f(x) \xrightarrow[x \to -2+]{} +\infty$

} Pole

2) Felder schaffieren

3) Asymptoten:

$f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$ ⇒ waagrechte A. $y = 1$

Pole ⇒ senkrechte A. $x = +2$, $x = -2$

4) $$f'(x) = \frac{(x^2-4)(2x+4) - (x^2+4x-21)2x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{2x^3-8x+4x^2-16-2x^3-8x^2+42x}{(x^2-4)^2} = \frac{-4x^2+34x-16}{(x^2-4)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -4x^2+34x-16 = 0$; $-2x^2+17x-8 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2-8^2}}{-4} = \frac{-17 \pm 15}{-4}$$

$x_1 = -\frac{1}{7}$; $x_2 = \frac{32}{14} = -\frac{16}{7}$

Bereiche:

$x < -\frac{16}{7}$: $f'(x) < 0$

$-\frac{16}{7} < x < -2$: $f'(x) < 0$

$-2 < x < -\frac{1}{7}$: $f'(x) < 0$

$-\frac{1}{7} < x < 2$: $f'(x) < 0$

$2 < x$: $f'(x)$

6) Schnitt mit Asymptote

$$\frac{x^3}{3(x-2)^2} = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$x^3 = \left(\frac{1}{3}x + 4\right)(x^2 - 4x + 4)$$

$$x^3 = x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2 - 16x + 16$$

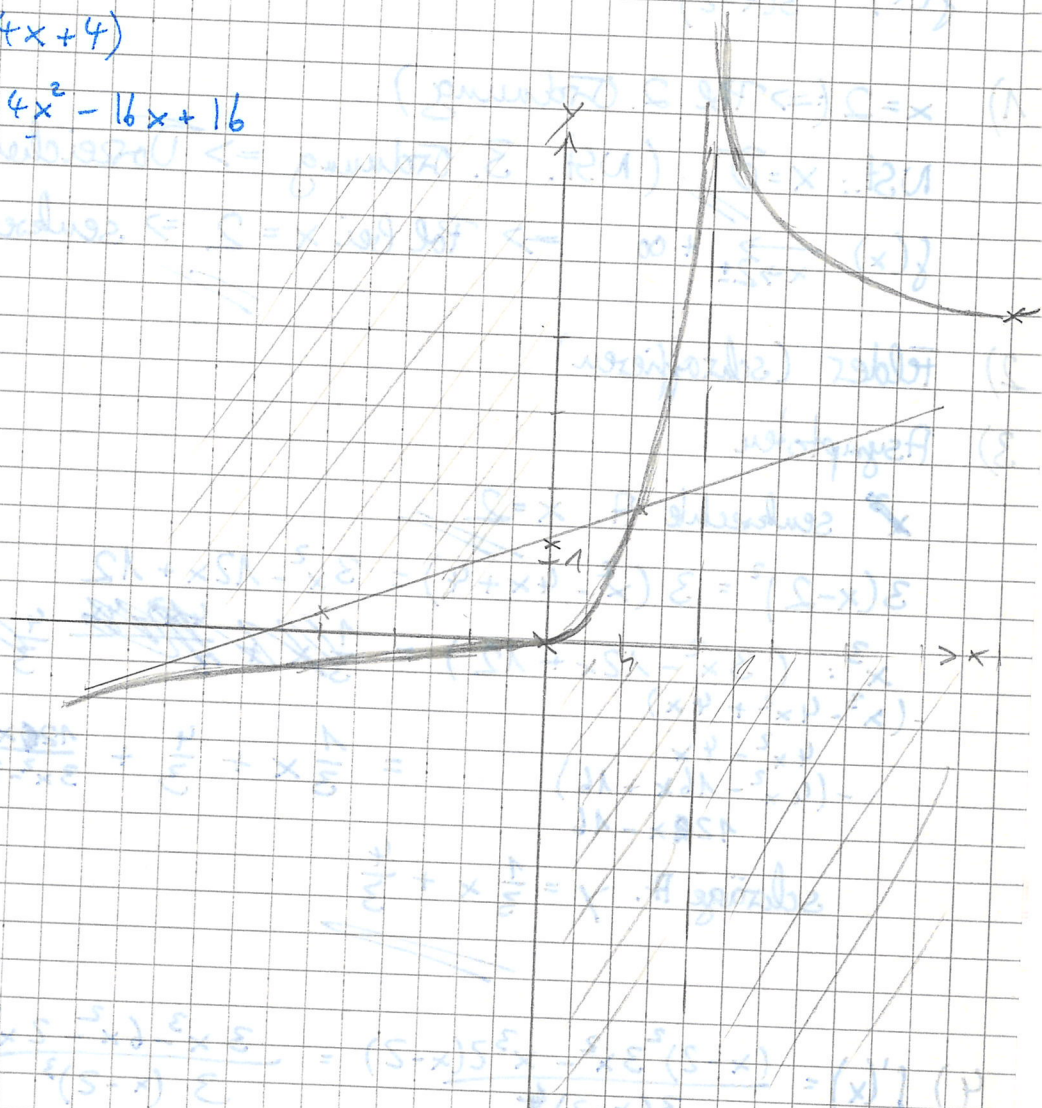
$$0 = 16 - 12x$$

$$x = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$S\left(\frac{4}{3} \mid \frac{16}{9}\right)$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x - 21}{x^2 - 4}$$

$+\frac{4}{9}$ $\frac{12}{9}$ $\frac{16}{9}$



3.4 Kurvendiskussion

$f(x) = \frac{x^3}{3(x-2)^2}$ $\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

1) $x = 2$ ($\Rightarrow$ Pol 2. Ordnung)

NSt.: $x = 0$ (NSt. 3. Ordnung $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel)

$f(x) \xrightarrow[x \to 2\pm]{} +\infty$ $\Rightarrow$ Pol bei $x = 2$ $\Rightarrow$ senkrechte A. bei $x = 2$

2) Felder (schraffieren)

3) Asymptoten

senkrechte A. $x = 2$

$3(x-2)^2 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3x^2 - 12x + 12$

$x^3 : (3x^2 - 12x + 12) = \cancel{\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}} \quad \cancel{\frac{4}{3} + \frac{20x - 16}{3x^2}}$

$-(x^3 - 4x^2 + 4x)$

$4x^2 - 4x$

$-(4x^2 - 16x + 16)$

$12x - 16$

$= \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} + \frac{12x - 16}{3x^2 - 12x + 12}$

schräge A. $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

4) $f'(x) = \frac{(x-2)^2 3x^2 - x^3 2(x-2)}{3(x-2)^4} = \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{3(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{3(x-2)^3}$

$f'(x) = 0$: $x^3 = 6x^2$; $x_1 = 6$, $x_2 = 0$ (NSt. 2. Ordnung $\Rightarrow$ kein Vorz. wechsel)

$x < 0$: $f'(x) > 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ monoton steigend

$0 < x < 2$: $f'(x) > 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ " "

$2 < x < 6$: $f'(x) < 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ " fallend

$x > 6$: $f'(x) > 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ " steigend

$\Big\}$ $f'(6) = 0$ $\Rightarrow$ Minimum $(6 \mid \frac{9}{2})$

5) $f''(x) = \frac{(x-2)^3(3x^2 - 12x) - 3(x-2)^2(x^3 - 6x^2)}{3(x-2)^6} =$

$= \frac{(x-2)(3x^2 - 12x) - 3(x^3 - 6x^2)}{3(x-2)^4} = \frac{8x}{(x-2)^4}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$0 > x$: $f''(x) < 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ rechtsgekrümmt

$0 < x < 2$: $f''(x) > 0$ $\Rightarrow$ " linkgekrümmt

$x > 2$: $f''(x) > 0$ $\Rightarrow$ " "

$\Big\}$ WP $(0 \mid 0)$ $\xRightarrow[f'(0) = 0]{}$ TP $(0 \mid 0)$

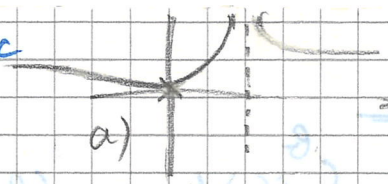
271 | 2, 6c ; 244 | 17c, 19c

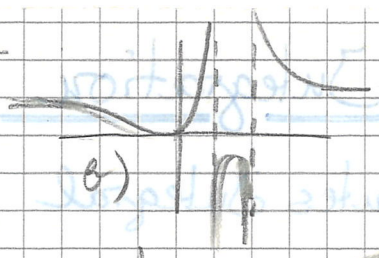
2a) $f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2}$

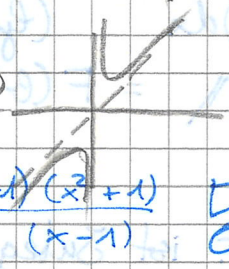
2b) $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}$

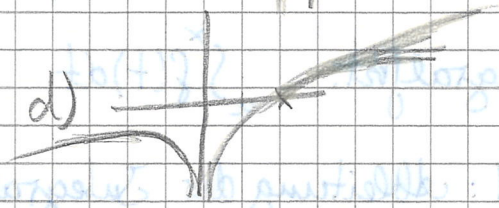
2c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

2d) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{|x|}}$









$f(x) = \frac{(x+1)(x^2+1)}{(x-1)}$ □

6c) $f(x) = \frac{x^3+9x}{x^2+1}$; $\mathbb{R} = \mathbb{D}$; N.St. bei $x = 0$; f (1. Ordnung)

$(x^3+9x) : (x^2+1) = x + \frac{8x}{x^2+1}$; schräge A. $y = x$

$-(x^3+x)$

$8x$

$f'(x) = \frac{(x^2+1)(3x^2+9) - (x^3+9x)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^3+3x+3x^2+9-2x^4-18x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^4+3x^3-9x^2+3x+9}{(x^2+1)^2}$

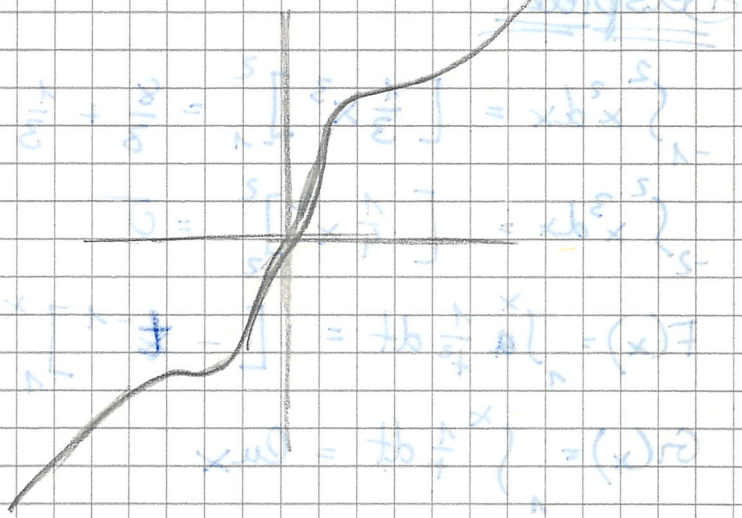
$-2x^4$

$W_f = \mathbb{R}$

$-f(-x) = f(x) \Rightarrow$ Punktsymm.

$f'(x) \neq 0$, $x =$

$f'(x) = 0$; $x = \pm\sqrt{3}$



$F(x) = \frac{x^2}{2} + 4 \cdot \ln|x^2+1|$

244 | 17c)

$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$; $\mathbb{D}_{f(x)} = \mathbb{R}$

$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \ln|x^2+x+1|$

19c)

$\int_2^5 \frac{x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int_2^5 \frac{3x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \cdot \left[\ln|x^3+1|\right]_2^5 =$

$= \frac{1}{3}\left(\ln(5^3+1) - \ln(2^3+1)\right) \approx 0{,}88$

$= \frac{1}{3} \ln \frac{126}{9} = \frac{1}{3} \ln 14 = \ln \sqrt[3]{14}$

Fläche zwischen zwei Fkt. $A = \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx \right|$

§4 Integration

4.1

- bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ (Grenzwert der Summe ...)
  $= F(b) - F(a)$
- Integralfkt. $\int_a^x f(t)\,dt$

  HDI: Ableitung der Integralfkt. ist Integrand
- Stammfkt. $F'(x) = f(x)$
- unbestimmtes Integral $\int f(x)\,dx = \{ F(x) + c \mid c \in \mathbb{R} \}$

Beispiele:

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = \tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{3} = 3,$$

$$\int_{-2}^{2} x^3\,dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4\right]_{2}^{2} = 0$$

$$F(x) = \int_1^x \tfrac{1}{t^2}\,dt = \left[-t^{-1}\right]_1^x = -\tfrac{1}{x} + 1$$

$$G(x) = \int_1^x \tfrac{1}{t}\,dt = \ln x$$

4.2 Integrationsregeln

$$\int x^n\,dx = \left\{ \tfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \mid c \in \mathbb{R} \right\} \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \{ \ln|x| + c \mid c \in \mathbb{R} \}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \{ \ln|f(x)| + c \mid c \in \mathbb{R} \}$$

Beispiele:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \{ \ln|x^2+x+1| + c \mid c \in \mathbb{R} \}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \tfrac{1}{3}\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = \tfrac{1}{3}\left[\ln|x^3+1|\right]_1^2 =$$

$$= \tfrac{1}{3}(\ln 9 - \ln 2) = \ln \sqrt[3]{\tfrac{9}{2}};$$

265/15

$f_1(x) = \frac{4}{x^2}$ $\quad D_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f_2(x) = x^2 - 6x + 9$ $\quad D_2 = \mathbb{R}$

$\frac{4}{x^2} = x^2 - 6x + 9 \quad | \cdot x^2$

$\Rightarrow 4 = 4x^4 - 6x^3 + 9x^2 \quad \| \; 4 = x^2(4x^2 - 6x + 9) \quad | \cdot \frac{1}{2}$

$4 = x^2(x-3)^2$

$\Rightarrow \pm 2 = x(x-3)$

$x_1 = 1, x_2 = 2$

$A = \left| \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} - x^2 + 6x - 9 \right) dx \right| = \left| \left[-4x^{-1} - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 9x \right]_1^2 \right| =$

$= \left| -2 - \frac{8}{3} + 12 - 18 + 4 + \frac{1}{3} + 3 + 9 \right| = \frac{13}{3}$

Analytische Geometrie

§0 Wiederholung

gg.: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

1) u_1, u_2 linear unabh. $\Rightarrow g_1 \nparallel g_2$

2) $b - v_1, u_1, u_2$:

$\left|\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda \end{array}\right| \quad \begin{array}{c} 0 \\ \lambda \\ -\lambda \end{array} \quad \begin{array}{c} = 1 \\ = 1 \\ = 1 \end{array}$

$0 - 1 + 1 - 1 + 0 + 0 = -1 \neq 0$

$\Rightarrow g_1, g_2$ windschief

d.h. $\det(b - v_1, u_1, u_2) \neq 0 \Rightarrow b - v_1, u_1, u_2$ lin. unabhängig

Multiplikation der drei Diagonalen Addition Subt. Add.

0.1 Lage zweier Geraden

$g_1: \vec{x} = v + \lambda u$

$g_2: \vec{x} = b + \mu w$

1) $g_1 \parallel g_2 \Leftrightarrow u, w$ lin. abh.

a) $g_1 = g_2 \Leftrightarrow \begin{cases} u, w \text{ lin. abh.} \\ b - v, u \text{ lin abh.} \end{cases}$

b) $g_1 \parallel g_2 \wedge g_1 \neq g^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u, w \text{ lin. abh.} \\ b - v, u, \text{ lin unabh.} \end{cases}$

2) $g_1 \cap g_2 = \{S\} \Leftrightarrow \begin{cases} u, w \text{ lin unabh.} \\ b - v, u, w \text{ lin. abh.} \end{cases}$

3) $g_1 \cap g_2 = \{\} \Leftrightarrow \begin{cases} u, w \text{ lin unabh.} \\ b - v, u, w \text{ lin. unabh.} \end{cases}$

$\wedge g_1 \nparallel g_2$

0.2 Lage zweier Ebenen

$E_1: \vec{x} = v + \lambda u_1 + \mu w_1 \quad (u_1, w_1 \text{ lin. unabh.})$

$E_2: \vec{x} = b + \varepsilon u_2 + \tau w_2 \quad (u_2, w_2 \text{ lin. unabh.})$

1) $E_1 \parallel E_2 \iff \begin{cases} u_1, w_1, u_2 & \text{lin. abh.} \\ u_1, w_1, w_2 & \end{cases}$

a) Sonderfall: $E_1 = E_2$: zusätzlich $b - v_1, u_1, w_1$ lin. abh.

b) $E_1 \parallel E_2 \wedge E_1 \neq E_2 \iff b - v_1, u_1, w_1$ lin. unabh.

2) $E_1 \cap E_2 = g \iff u_1, w_1, u_2$ lin. unabh.
($E_1 \neq E_2$)

oder

u_1, w_1, v_2 lin. unabh.

Beispiel:

$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad E_1: -3x_1 - 2x_3 + 6 = 0$

$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\det(u_1, w_1, w_2) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +2 \Rightarrow \text{lin. unabh.}$$

$\Rightarrow E_1, E_2$ Schnitt

$\det(b - v_1, u_1, w_2) = 0$

$$\begin{vmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -6 & 0 \\ 3 & -1 \\ 3 & 0 \end{matrix} \quad = 18 + 6 = 24$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & 0 \\ -3 & -1 \\ -3 & 0 \end{matrix} \quad = -18 - 6 = -24$$

116/21
130/20 131/23

Zwei Geraden in E_1:

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}]$

Schnittpunkte mit E_2

$g_1 \cap E_2: \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

I. $4 = -2 + 2\tau \Rightarrow \tau = 3$

II. $-\lambda = 3 - \tau \Rightarrow \lambda = 0$

Parameterfreie Form: $-2x_3 + 8x_2 - 4x_1 +$

$12x_1 - 2x_2 - 3 \cdot$

$-3x_1 - 2x_2 + 12x_3 + 2 = 0$



$(0|0|-\frac{1}{6})$

$(\frac{2}{3}|0|0)$

$(0|1|0)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 4 - 2\mu$

$x_2 = -\lambda$

$x_3 = -3 + 3\mu$

III. $-3 = -6 + 3\tau$

$6 = 3 + 3$; $6 = 12$

g_2 Schnittpunkt: $\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} + 12\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$

$g_2 \cap E_2$: $\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

I. $4 - 2\mu = -2 + 2\tau$ $\quad\Rightarrow\quad 4 - 2\mu = -2 + 6 \Rightarrow \mu = 6$

II. $0 = 3 - \tau \Rightarrow \tau = 3$

III. $-3 + 3\mu = -6 + \tau \cdot 3$; $-3 + 3\mu = -3 = -6 + 9 \Rightarrow 6 = 12$

Schnittpunkt (

Schnittpunkt einer Ursprungsgerade aus E_1 mit E_2 : $\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$

Eine Ursprungsgerade aus E_2: $x = \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

Schnittpunkt mit E_1:

$\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$

I. $-6 = -3 + 3\mu$ $\quad\Rightarrow\quad -6 = -3 + 9 \Rightarrow 6 = -6$

II. $3 = -\lambda \Rightarrow \lambda = 3$

III. $-12 = 4 - 2\mu \Rightarrow \mu = 8$

Schnittpunkt einer Ursprungsgerade aus E_2 mit E_1 : $\begin{pmatrix}-8\\3\\6\end{pmatrix}$

Schnittgerade: $x = a + \lambda_0(b - a)$

$x = \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} + \lambda_0\left(\begin{pmatrix}-8\\3\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}\right) =$

$= \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} + \lambda_0\begin{pmatrix}-12\\3\\9\end{pmatrix}$

HA: 116/21; 130/20; 131/23

20) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) Schnittpunkt mit der x_1-Achse

$S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

1) $6 = -2 + 3\lambda + 8\mu \quad \Rightarrow 6 = -2 - 3 = -5$

2) $0 = 1 + \lambda \quad \Rightarrow \lambda = -1$

3) $0 = 3 + 3\lambda + 5\mu$; $0 = 5\mu \Rightarrow \mu = 0$

$S \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $S \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

1) $0 = -2 + 3\lambda + 8\mu \quad \Rightarrow 3\lambda = 2 - 8\mu$; $\lambda = \frac{2}{3} - \frac{8}{3}\mu$

2) $1 = 1 + \lambda \quad \Rightarrow 6 = 1 + \frac{2}{3} - \frac{8 \cdot 5}{9} = -\frac{25}{9}$

3) $0 = 3 + 3\lambda + 5\mu \quad \Rightarrow 0 = 3 + 2 - 8\mu + 5\mu$; $0 = 5 - 3\mu$; $\mu = \frac{5}{3}$

$S \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{25}{9} \\ 0 \end{pmatrix}$

c) ~~$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$~~

0.3 Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$

geg.: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$v \circ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = 0 \quad \text{(Skalar!)}$$

Allgemein: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Dann gilt:

$$\cos(v, b) = \frac{v \cdot b}{|v| \cdot |b|} \qquad 0 \leq \sphericalangle(v, b) < \pi$$

wobei: $|v| := \sqrt{v^2}$ (Betrag von v)

Beispiel

$$|v| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\cos(v, b) = \frac{v \cdot b}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}} = 0$$

$$\sphericalangle(v, b) = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow v, b$ orthogonal: $v \perp b$

Es gilt: v orthogonal $b \iff v \cdot b = 0$

ges. $\sphericalangle(v, c)$

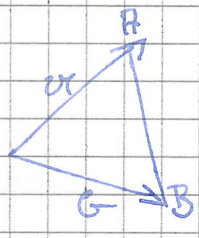
$$\cos(v, c) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^2} \cdot \sqrt{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}^2}} = \frac{2 - 2 + 6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{9}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\sphericalangle(v, c) = 58°$$

$$v^\circ = \frac{1}{|v|} \cdot v = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

$$|v^\circ| = \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{4}{14} + \frac{9}{14}} = 1$$

Abstand zweier Punkte: Ha: 163/1; A70/3, 18



163/1 $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix}-12\\3\\4\end{pmatrix}$

a) $|\vec{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}^2} = 1$

$|\vec{b}| = \sqrt{\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}^2} = \sqrt{3}$

$|\vec{x}| = \sqrt{\begin{pmatrix}-12\\3\\4\end{pmatrix}^2} = 13$

$\vec{a}^\circ = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{b}^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

$\vec{x}^\circ = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix}-12\\3\\4\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}-\frac{12}{13}\\ \frac{3}{13}\\ \frac{4}{13}\end{pmatrix}$

170/3a) $\vec{u} = \begin{pmatrix}4\\-7\\-4\end{pmatrix}$

$\cos\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-7\\-4\end{pmatrix}\right) = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\-7\\-4\end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{\begin{pmatrix}4\\-7\\-4\end{pmatrix}^2}} = \frac{4}{\sqrt{16+49+16}} = \frac{4}{9}$ $\varphi = 64^\circ$

$\cos\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-7\\-4\end{pmatrix}\right) = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\-7\\-4\end{pmatrix}}{1 \cdot 9} = \frac{-7}{9}$ $\varphi = 141^\circ$

$\cos\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-7\\-4\end{pmatrix}\right) = \frac{-4}{9}$ $\varphi = 116^\circ$

3b) $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$

$\cos\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}}{} = 0$ $\varphi = 90^\circ$

$\cos\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}^2}} = \frac{3}{\sqrt{3+1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ $\varphi = 18{,}4^\circ$

$\cos\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}$ $\varphi = 72^\circ$

170/18

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-\sqrt{3}\\5\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\cos\left(\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}^2}\sqrt{\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}^2}} = \frac{6+8}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{4+4+1}} = \frac{14}{\cancel{3}20} = \cancel{\frac{7}{10}}$ $\frac{14}{15} \Rightarrow \varphi = 21^\circ$

174/48

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$

$A(1|0|-2)$

$\overline{AP} = 5$

$\overline{AP} = |\vec{p} - \vec{a}| = 5$ $\quad P \in g$

$$\left|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right| = 5$$

$$\left|\begin{pmatrix}3\lambda\\4\lambda\\3\end{pmatrix}\right| = 5$$

$$\sqrt{9\lambda^2 + 16\lambda^2 + 9} = 5$$

$$25\lambda^2 + 9 = 25$$

$$\lambda^2 = \frac{16}{25}$$

$$\lambda = \pm\frac{4}{5}$$

$$\vec{P_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{4}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17/5\\16/5\\1\end{pmatrix}$$

$P_1\left(\frac{17}{5}\middle|\frac{16}{5}\middle|1\right)$

$P_2\left(-\frac{7}{5}\middle|-\frac{16}{5}\middle|1\right)$

175/56

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ $\quad P(1|-1|1)$

Bed: $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$

$$\overrightarrow{PQ} = |\vec{q} - \vec{p}| = \left|\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right| = \begin{pmatrix}2\\2+\lambda\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda = -\frac{2}{5}$$

$$\vec{q} \; \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + \left(-\frac{2}{5}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3/5\\1/5\end{pmatrix}$$

$Q\left(3\middle|\frac{3}{5}\middle|\frac{1}{5}\right)$

b) $PQ: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\-3/5\\4/5\end{pmatrix}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}10\\3\\4\end{pmatrix}\left(\begin{matrix}5\\4\\-2\end{matrix}\right)$$

c) $d(P,g) = |\vec{PQ}| = \sqrt{4 + \frac{64}{25} + \frac{16}{25}} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$

d) ~~$\vec{QP} = \vec{g} \cdot \vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$~~

$\vec{PQ} =$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 3/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\lambda =$

$\vec{P'} = \vec{P} + 2\vec{PQ}$ *

$\vec{QP}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mu = -2$

$\vec{QP}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -8/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -8/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

$\mu = 1$

$\vec{P'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -8/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$ $\quad P'(5 \mid \frac{11}{5} \mid -\frac{3}{5})$

$\vec{h} = \frac{1}{2}(a+b)$

Hälfte der Str.

HAUSAUFGABE

A5/57

$A(-2|-6), B(4|-2), C(-5|5)$

a) $\overline{AC} = |\vec{C} - \vec{A}| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+121} = \sqrt{130}$

$\overline{BC} = |\vec{C} - \vec{A}| = \left|\begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{81+49} = \sqrt{130}$

b) $\cos\left(\vec{AB}, \left(-\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC}\right)\right) = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 13 \end{pmatrix}\right|} = \frac{4 \cdot 13}{\sqrt{36+16} \cdot \sqrt{13^2}} = \frac{4}{\sqrt{52}} = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}\right|} =$

$\frac{36-36}{\ldots} = 0 \Rightarrow \varphi = 90°$ q.e.d.

c) $\cos\left(\vec{AC}, \vec{AB}\right) = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+121} \cdot \sqrt{36+16}} = \frac{-18+44}{\sqrt{130} \cdot \sqrt{52}} = \frac{26}{\sqrt{130}\sqrt{52}}$

$\cos\left(\vec{BC}, \vec{BA}\right) = \frac{\begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{81+49} \cdot \sqrt{36+16}} = \frac{54-28}{\sqrt{130}\sqrt{52}} = \frac{26}{\sqrt{130}\sqrt{52}}$

60) $A(-3|-4|1)$, $B(0|0|1)$, $C(6|8|3)$, $P(3|4|2)$

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}6\\8\\2\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}6\\8\\2\end{pmatrix}$

I. $3 = -3\lambda + 6\mu$ passt!

II. $4 = -4\lambda + 8\mu \Rightarrow 1 = -1\lambda + 2\mu \Rightarrow \lambda = 2\mu - 1$ $\not\Rightarrow \lambda = 0$

III. $2 = 1 + 2\mu \Rightarrow \mu = \frac{1}{2}$

c) ~~$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}$~~

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}$

d) $\cos\left(\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right) = 0$

Zähler $= 0$: $\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 3x_1 + 4x_2 = 0$

$x_1 = -\frac{4}{3}x_2$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-4\\3\\42\end{pmatrix}$

~~$\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}x_2\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\3\\3\end{pmatrix}$~~ $= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}6\\8\\2\end{pmatrix}$

I. $-4 = -3\lambda + 6\mu \Rightarrow 3\lambda = 6\mu + 4 \Rightarrow 6\mu - \frac{3}{4} = 6\mu + 4$

II. $3 = -4\lambda + 8\mu \Rightarrow 4\lambda = 8\mu - 3 \Rightarrow \lambda = 2\mu - \frac{3}{4}$

III. $x_3 = 1 + 2\mu \quad -4 = -6\mu - \frac{3}{4} + 6\mu \quad -1 = -7\lambda + 14\mu$

$\frac{1}{4} = \lambda - 2\mu \; ; \; \lambda = 2\mu + \frac{1}{4}$

I. $+\frac{4}{3}x_2 = +3\lambda + 6\mu$

II. $x_2 = -4\lambda + 8\mu$

$-\frac{1}{3}x_2 = -7\lambda + 14\mu \qquad \frac{1}{3}x_2 = 7\lambda - 14\mu$

$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\3\\x_3\end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix}-4\\3\\x_3+1\end{pmatrix}$

d) $\vec{w} \perp \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$

$\vec{w}_1 \begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\8\\2\end{pmatrix}$ linear abhängig

1) $\vec{w} \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \vec{0}$, d.h. $3w_1 + 4w_2 = \vec{0}$

2)
$$\begin{vmatrix} w_1 & 3 & 9 \\ w_2 & 4 & 12 \\ w_3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$8w_1 + 36w_3 - 36w_3 - 6w_2 = \vec{0}$

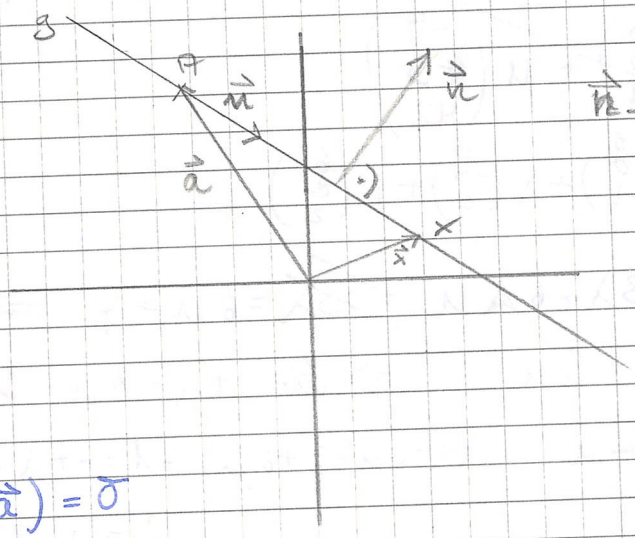
$8w_1 - 6w_2 = \vec{0}$

$w_1 = 0,\ w_2 = \vec{0}$

w_3 beliebig

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\0\\12\end{pmatrix}$

§1 Die Normalenform der Geraden im $\mathbb{R}^2$



$\vec{n} \perp \vec{u}$

$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$

$\Rightarrow \vec{x} - \vec{a} = \lambda \vec{u} \quad | \cdot \vec{n}$

$\vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = \vec{n} \cdot \vec{u} \lambda$ ($\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$)

$\Rightarrow \vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad (*)$

86 | IV
1,2 a,c

$P(\vec{p})$ erfüllt $(*)$: $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$

$\vec{u}, \vec{n}$ Basis des $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \vec{p} - \vec{a} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{n} \quad | \cdot \vec{n}$

$0 = \vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{n} + \mu \vec{n}^2$ ($\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$)

$0 = \mu \vec{n}^2 \quad \Rightarrow \mu = 0$

$\Rightarrow \vec{p} - \vec{a} = \lambda \vec{u}$

$\vec{p} = \vec{a} + \lambda \vec{u} \quad \Rightarrow P_{\vec{p}} \in g$

(*) in Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$u_1(x_1 - a_1) + u_2(x_2 - a_2) = 0$$

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + (-u_1 a_1 - u_2 a_2) = 0$$

1.1 Satz

Die Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$ besitzt die Normalenform $\vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$
in Koordinaten $u_1 x_1 + u_2 x_2 - (u_1 a_1 + u_2 a_2) = 0$

Beispiel:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 1 - \lambda$$

$$x_2 = 2 + \lambda$$

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 + x_2 - 3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Allgemein: Koordinatenform von g:

$$g: u_1 x_1 + u_2 x_2 + c = 0$$

$A \in g$

$$u_1 a_1 + u_2 a_2 + c = 0$$

$$u_1(x_1 - a_1) + u_2(x_2 - a_2) = 0$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$$

1.2 Satz

Ist $u_1 x_1 + u_2 x_2 + c = 0$ die Koordinatenform der Geraden g, so ist
$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} (\neq \vec{0})$ ein Normalenvektor von g

Beispiel:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ $\quad x_1 = 1+2\lambda$

$x_2 = 1-3\lambda$

$3x_1 + 2x_2 = 5 \;;\; 3x_1 + 2x_2 - 5 = 0$

$\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \perp \vec{u}$, da: $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = 0$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

~~$-x_1 + x_2$~~

$\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = 0$

$-x_1 + 3x_2 \mp (-2+3) = 0 \;;\; -x_1 + 3x_2 - 1 = 0$

$k: 2x_1 - x_2 + 2 = 0$ Normalenform von k

~~$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right)$~~ $\quad -2x_1 + x_2 - 2 = 0$ orientierte Normalenform

$\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad K(0|2)$

$k: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad$ S6/III 1,2

1.3 Orientierung der Normalenform

Bei Einsetzen von $\vec{0}$ für $\vec{x}$ ergibt sich eine negative Zahl.

$\vec{n}_0 \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ normierte NF

also: $2x_1 - x_2 + 2 = 0$

$\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad |\vec{n}| = \sqrt{5}$

$\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}x_2 + \frac{2}{\sqrt{5}} = 0$ $\quad \frac{2x_1 - x_2 + 2}{-\sqrt{5}} = 0$ normiert & orientiert

1.4 Definition

Eine orientierte & normierte NF einer Geradengleichung im $\mathbb{R}^2$ heißt Hessesche Normalenform HNF.

$g: u_1x_1 + u_2x_2 + c = 0$

$g_{HF}: \frac{u_1x_1 + u_2x_2 + c}{\pm\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = 0$

bzw. $\vec{u}^0 \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

Beispiel:

$g: \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$

bzw: $4x_1 - 3x_2 + 4 = 0$

$g_{HF}: \frac{4x_1 - 3x_2 + 4}{\sqrt{25}} = 0$

§2 Die Normalenform der Ebene im $\mathbb{R}^3$

2.1 Satz

Die Ebene $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ besitzt die Normalenform $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ mit $\vec{n} \perp \vec{u}$ und $\vec{n} \perp \vec{v}$

in Koordinaten:

$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 - (u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3) = 0$

2.2 Satz

Ist $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + c = 0$ die NF der Ebene E, so ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ $(\neq \vec{0})$ ein Normalenvektor von E.

(d.h. $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$)

2.3 Orientierung

Beim Einsetzen von $\vec{0}$ für $\vec{x}$ ergibt sich eine negative Zahl.

2.4 Normi Def.

Die orientierte und normierte NF einer Ebenengleichung heißt Hessesche NF = HNF.

$E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

bzw. $\dfrac{u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + c}{\pm\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} = 0$

Beispiel:

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$: 1) $u_1 + u_3 = 0$

2) $2u_2 + u_3 = 0$

wähle: $u_1 = 1 \Rightarrow u_3 = -1$

$\Rightarrow u_2 = \frac{1}{2}$

$\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot 2 : \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$

182/1;2b;c;d;4

1a) $\dfrac{-3x_1 + 4x_2 + 15}{-\sqrt{9+16}} = 0$

1b) $\dfrac{x_1 + x_2 + 1}{-\sqrt{2}} = 0$

1c) $\dfrac{2x_1}{\sqrt{4}} = 0 \; ; \; x_1 = 0$

1d) $\dfrac{mx_1 - x_2 + s_2}{\pm\sqrt{m^2 + 1}} = 0$

1e) $x_1 = 1 + 12\lambda$

$x_2 = 1 + 5\lambda$

$5x_1 + 12x_2 = 5 + 12$

$\dfrac{-5x_1 + 12x_2 - 7}{\sqrt{25+144}} = 0$

$\dfrac{-5x_1 + 12x_2 - 7}{13} = 0$

II. - I.:

$12x_2 - 5x_1 = 12 - 5$

$-5x_1 + 12x_2 - 7 = 0$

182/26)

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$

c) $12x_1 - 5x_2 + 37 = 0$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 37/5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 37/5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

$1 + 12\lambda = 5\mu \; ; \; \mu = \frac{12\lambda + 1}{5}$

$-2 - 5\lambda = 37/5 + 12\mu$

$-2 - 5\lambda = \frac{37}{5} + \frac{12}{5}(12\lambda + 1)$

$-2 - \frac{37}{5} - 1 = 5\lambda + \frac{144\lambda}{5} \quad | \cdot 5$

$-10 - 37 - 5 = 25\lambda + 144\lambda$

$169\lambda = -52$

$\lambda = -\frac{52}{169} = -\frac{4}{13}$

$\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{4}{13} \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4 \cdot 12}{13} \\ -2 + \frac{5 \cdot 4}{13} \end{pmatrix}$

$F\left(-\frac{35}{13} \middle| -\frac{6}{13}\right)$

Normalenvektor zu Ebene mit $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$:

I. $u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3 = 0$

II. $v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 = 0$

d) $|\overline{AF}| = |\vec{F} - \vec{A}| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{35}{13} \\ -\frac{6}{13} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{48}{13} \\ \frac{20}{13} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{48}{13}\right)^2 + \left(\frac{20}{13}\right)^2} = 4$

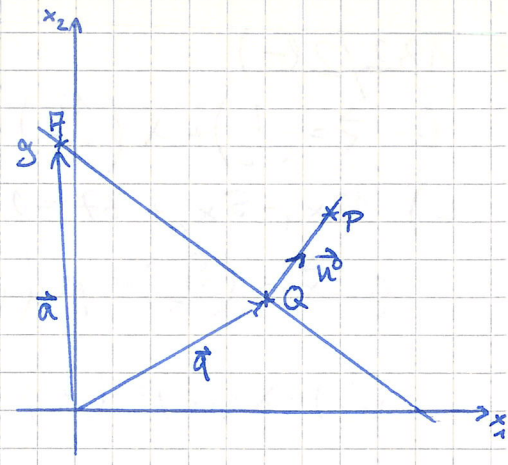
4) $g: 3x_1 - 5x_2 - 5 = 0 \; ; \; A(3|-4)$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

~~[illegible]~~

$3x_1 - 5x_2 + c = 0$

Punkt einsetzen $\Rightarrow c$



gegeben: $g_H: \vec{n}_0^0 (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

$\overrightarrow{QP} = d \cdot \vec{u}^0$

$|\overrightarrow{QP}| = |d \cdot \vec{u}^0| =$

$= |d| \cdot |\vec{u}^0| =$

$= |d|$

$\overline{QP} = |d|$

$\overrightarrow{QP} = \vec{p} - \vec{q}$

$\Rightarrow \vec{q} = \vec{p} - d \cdot \vec{u}^0$

$g_H: \vec{u}^0 (\vec{p} - d \cdot \vec{u}^0 - \vec{a}) = 0$

$\vec{u}^0 (\vec{p} - \vec{a}) - d \vec{u}_0^2 = 0$

$\vec{u}^0 (\vec{p} - \vec{a}) = d$

Also

$d(P, g) = |\vec{u}^0 (\vec{p} - \vec{a})|$

2.5 Definition

$E_H: \vec{n}_0 (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ HNF der Ebene E

Die reelle Zahl $|d| = |\vec{n}_0 (\vec{p} - \vec{a})|$ heißt Abstand des Punktes $P(\vec{p})$ von E. Für die Gerade analog.

2.6 Lage des Punktes P

1) $d > 0$: P und O liegen auf verschiedenen Seiten von g

2) $d = 0$: $P \in g$

3) $d < 0$: P und O liegen auf der selben Seite von g

182/2a; 3; 5; 10a

182/2a)

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\vec{u^0} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\left|\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}\right|} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{144+25}} = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$

~~$|d| = \left|\begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{37}{5} \end{pmatrix}\right]\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ \frac{47}{13} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{47}{13}\right)^2} = 3{,}73\ldots$~~

$|d| = \left|\begin{pmatrix} 12/13 \\ -5/13 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{37}{5} \end{pmatrix}\right]\right| = \left| 12/13 + \frac{47}{13} \right| = \frac{59}{13}$

3)

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{u^0} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{25}} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

$|d_1| = \left|\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right]\right| = \frac{12}{5}$

$|d_2| = \left|\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right]\right| = \frac{12}{5}$

$|d_3| = \left|\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right]\right| = \frac{36}{5}$

$|d_4| = \left|\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right]\right| = 0$

5)

$13 = \left|\begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}\right]\right|$

$\left|\begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = 13 \quad \left| u_1^0 \cdot 12 \mp u_2^0 \cdot 5 \right| = 13$

$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$

$u_1^{0\,2} = 1 - u_2^{0\,2}$

$u_1^0 = \sqrt{1 - u_2^{0\,2}}$

10a) $g: x_1 + x_2 - 2 = 0$; $h: 7x_1 + x_2 + 7 = 0$

$g_H: \frac{x_1 + x_2 - 2}{\sqrt{2}} = 0$ $\quad h_H: \frac{7x_1 + x_2 + 7}{-\sqrt{50}} = 0$

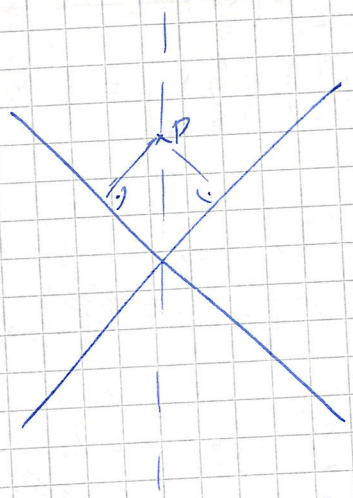
$w_1: \frac{x_1 + x_2 - 2}{\sqrt{2}} + \frac{7x_1 + x_2 + 7}{-\sqrt{50}} = 0$

$w_1: \frac{-5x_1 - 5x_2 + 10 + 7x_1 + x_2 + 7}{-5\sqrt{2}} = 0$

$w_1: \frac{2x_1 - 4x_2 + 17}{-5\sqrt{2}} = 0$

$w_2: \frac{-5x_1 - 5x_2 + 10 - 7x_1 - x_2 - 7}{-5\sqrt{2}} = 0$

$\frac{-12x_1 - 6x_2 + 3}{-5\sqrt{2}} = 0$



$|g_H(P)| = |h_H(P)|$

$g_H(P) = +h_H(P)$ } zwei Winkelhalb.

$g_H(P) = -h_H(P)$ }

$g_H(P) - h_H(P) = 0$ (Winkelhalb. im Ursprungsr.)

$g_H(P) + h_H(P) = 0$

86/III, IV

S. 186/2

E: $2x_1 + x_2 - 3x_3 - 5 = 0$, $A(11|5|-16)$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Parameterform der Ebene:

$X(0|5|0)$, $Y(2,5|0|0)$, $Z(0|2|-1)$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2,5-0 \\ 0-5 \\ 0-0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-5 \\ -1-0 \end{pmatrix}$

$g \cap E$:

$\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

I. $11 + 2\lambda = 5\delta \Rightarrow \delta = \frac{11+2\lambda}{5}$

II. $5 + \lambda = 5 - 10\delta - 3\tau$

III. $-16 + \lambda(-3) = -\tau \Rightarrow \tau = 16 + 3\lambda$

in II: $5 + \lambda = 5 - 22 - 4\lambda - 3 \cdot 16 - 9\lambda$

$14\lambda = -70$

$\lambda = -5$

Schnittpunkt F: $\vec{F} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -16 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PP'} = \vec{P} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -16 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1-11 \\ 0-5 \\ 0+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 34 \end{pmatrix}$

$P'(-9|-5|34)$

3) a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$; E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4 = 0$

$g \cap E = \{S\}$

Parameterform der Ebene:

$X(2|0|0)$, $Y(0|4|0)$, $Z(0|0|-2)$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-0 \\ -2-0 \end{pmatrix}$

S: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

I. $2 - 2\delta - 2\tau = 1 + 2\lambda$

II. $4\delta = -1 + 5\lambda \Rightarrow \delta = \frac{-1+5\lambda}{4}$

III. $-2\tau = 2 - \lambda \Rightarrow \tau = \frac{\lambda - 2}{2}$

$2 - \frac{-1+5\lambda}{2} - \lambda + 2 = 1 + 2\lambda$

$4 + 1 - 5\lambda - 2\lambda + 4 = 2 + 4\lambda$

$11\lambda = 7 \; ; \; \lambda = \frac{7}{11}$

$\vec{S} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \frac{2}{11}\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25/11\\24/11\\15/11\end{pmatrix}$

$P \in g: P(1|-1|2)$

Lotgerade auf E durch P:

$l: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \lambda'\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$

Schnittpunkt $l \cap E$:

$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \lambda'\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$

I. $1 + 2\lambda' = 2 - 2\delta - 2\tau$

II. $-1 + \lambda' = 4\delta \Rightarrow \delta = \frac{-1+\lambda'}{4}$

III. $2 - 2\lambda' = -2\tau \Rightarrow \tau = \lambda' - 1$

$1 + 2\lambda' = 2 - \frac{-1+\lambda'}{2} - 2\lambda' + 2$

$2 + 4\lambda' = 4 + 1 - \lambda' + 4 - 4\lambda' + 4$

$+\lambda' = 7$

$\vec{F} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\6\\-12\end{pmatrix}$

$\vec{P'} = \vec{P} + 2\vec{PF} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}15-1\\6+1\\-12-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}29\\13\\-26\end{pmatrix}$

$g': \vec{x} = \begin{pmatrix}29\\13\\-26\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}25/11-29\\24/11-13\\15/11+26\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}29\\13\\-26\end{pmatrix} + \mu($

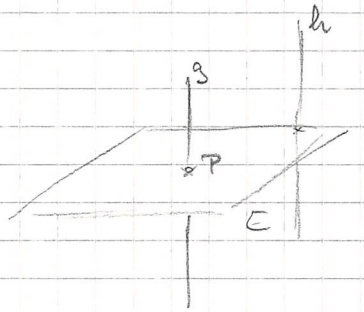
b) $g \parallel E$; $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$P(1|-1|2)$

Lotgerade: $l: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \lambda'\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$

Schnitt $P'(29|13|-26)$

$g': \vec{x} = \begin{pmatrix}29\\13\\-26\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$



187/11

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} + \delta\vec{u} + \tau\vec{v}$

~~$\vec{u}, \vec{v}, \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ linear unabh.~~

$\vec{u} \perp \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v} \perp \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

$2u_1 - 2u_2 + u_3 = 0$; $2v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$

$\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Normalengleichung:

$$\begin{vmatrix} x_1-2 & 0 & 1 \\ x_2-5 & 1 & 1 \\ x_3-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(linear abhängig)}$$

$$2x_2 - 10 - x_3 + 1 - 2x_1 + 4 = 0$$

$$-2x_1 + 2x_2 - x_3 - 5 = 0$$

HNF: $\frac{-2x_1+2x_2-x_3-5}{\sqrt{4+4+1}} = 0 \; ; \; \frac{-2x_1+2x_2-x_3-5}{3} = 0$

$$\begin{pmatrix} -2/3 \\ +2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Schnittpunkt von E mit h:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. $5 - \mu = 2 + \tau \quad ; \; \tau = 3 - \mu$

II. $3 + \mu = 5 + \sigma + \tau$

III. $3 - 0{,}5\mu = 1 + 2\sigma$

$4 - \mu = 4\sigma \; ; \; [\mu = 4 - 4\sigma] \; ; \; \sigma = \frac{4-\mu}{4}$

$3 + \mu = 5 + 1 - \frac{1}{4}\mu + 3 - \mu$

$\sigma = \frac{1}{4}\mu \; ; \; \mu = 24$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 24 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 27 \\ -9 \end{pmatrix}$$

im HNF:

$$d = \left| \begin{pmatrix} -2/3 \\ +2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -19-2 \\ 27-5 \\ -9-1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -21 \\ 22 \\ -10 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{42}{3} + \frac{44}{3} + \frac{10}{3} \right| = \left| \frac{96}{3} \right| = 32$$

187/12

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lotebene:

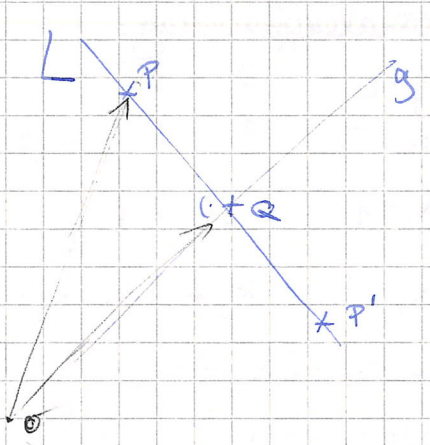
$-2u_1 + u_2 = 0 \; ; \; -2v_1 + v_2 = 0$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{u}(\vec{x} - \vec{a}) = 0$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$





$\vec{P'} = \vec{P} + 2\vec{PQ}$

86 | IV

1a) $\vec{AC} \perp \vec{CB}$

$\vec{AC} \cdot \vec{CB} = 0$

$$\left[\begin{pmatrix}-1\\9\\-10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-10\\-9\\-4\end{pmatrix}\right]\cdot\left[\begin{pmatrix}11\\5\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\9\\-10\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}9\\18\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12\\-4\\6\end{pmatrix} = 9\cdot 12 - 4\cdot 18 - 6\cdot 6 = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

$$\overline{CA} = |a-c| = \left|\begin{pmatrix}-10\\-9\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\9\\-10\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-9\\-18\\6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{81+18^2+36} = 21$$

$$\overline{CB} = |b-c| = \left|\begin{pmatrix}11\\5\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\9\\-10\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}12\\-4\\6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{144+16+36} = 14$$

1a) $E: x = \begin{pmatrix}-10\\-9\\-4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}11+10\\5+9\\-4+4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\cdot+10\\9+9\\-10+4\end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix}-10\\-9\\-4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\14\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}9\\18\\-6\end{pmatrix}$$

2c) $g: x = \begin{pmatrix}-11\\-5\\10\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}-8\\5\\3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-11\\-5\\10\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}-8\\5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\-9\\-4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\14\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\6\\-2\end{pmatrix}$$

$$-11 - 8\delta = -10 - \lambda + 3\mu$$

$$-5 + 5\delta = -9 + 14\lambda + 6\mu$$

$$16 + 3\delta = -4 - 2\mu$$

$$2\mu = -14 - 3\delta \quad ; \quad 2\mu = -14 - 3\left(\lambda - \tfrac{46}{14}\right) \quad ; \quad \mu = -7 - \tfrac{3}{2}\left(\lambda - \tfrac{46}{14}\right)$$

$$-5 + 5\delta = -9 + 14\lambda - 3\cdot 14 - 9\delta$$

$$14\delta = -46 + 14\lambda$$

$$\delta = \lambda - \tfrac{46}{14}$$

$$-5 + 5\left(\lambda - \tfrac{46}{14}\right) = -9 + 14 + 6\left(-7 - \tfrac{3}{2}\left(\lambda - \tfrac{46}{14}\right)\right)$$

$$5\lambda - \tfrac{5\cdot 46}{14} - 5 + 9 - 14 = -42 - 9\left(\lambda + \tfrac{46\cdot 9}{14}\right)$$

$$14\lambda = -42 + \tfrac{46\cdot 9}{14} + \tfrac{5\cdot 46}{14} + 5 - 9 + 14$$

$$14\lambda = -42 + 46 + 5 - 9 + 14$$

$$\lambda = 1$$

$$\delta = 1 - \tfrac{46}{14} \quad ; \quad \delta = \tfrac{14-46}{14} \quad ; \quad \delta = -\tfrac{32}{14}$$

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix}-11\\-5\\10\end{pmatrix} - \tfrac{32}{14}\begin{pmatrix}-8\\5\\3\end{pmatrix}$$

1c)

$\overline{AT} = |\vec{t} - \vec{a}| = \left|\begin{pmatrix}2{,}6\\-0{,}6\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-10\\-9\\-4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}12{,}6\\8{,}4\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{12{,}6^2 + 8{,}4^2}$

$\overline{BT} = \left|\begin{pmatrix}2{,}6\\-0{,}6\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}11\\5\\-4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-8{,}4\\-5{,}6\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{8{,}4^2 + 5{,}6^2}$

$\frac{\overline{AT}}{\overline{BT}} = \frac{\sqrt{12{,}6^2+8{,}4^2}}{\sqrt{8{,}4^2+5{,}6^2}} = \frac{3}{2}$

$\lambda = \frac{t_1 - a_1}{B_1 - t_1}$

2a)

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-11\\-5\\10\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-8\\5\\3\end{pmatrix}$

$x_1 = -11 - 8\lambda$

$x_2 = -5 + 5\lambda$

$x_3 = 10 + 3\lambda$

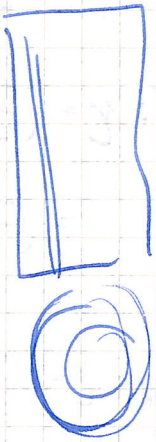
in E: $2x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 31 = 0$

$-22 - 16\lambda + 15 - 15\lambda - 60 - 18\lambda - 31 = 0$

$\lambda = -2$

in g: $\vec{q} = \begin{pmatrix}-11\\-5\\10\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-8\\5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-15\\4\end{pmatrix}$

$Q(5|-15|4)$



important!

2a)

$\begin{vmatrix} x_1+10 & 11 & -1 \\ x_2+9 & 5 & 9 \\ x_3+4 & -4 & -10 \end{vmatrix} = 0$

$-(x_3+4)\cdot 5 + (-4\cdot 9\cdot(x_1+10)) + (-10\cdot(x_2+9)\cdot 11) - (-10\cdot 5\cdot(x_1+10))$

$-(+4\cdot(x_2+9)) - (x_3+4)\cdot 9\cdot 11 = 0$

$-5x_3 + 20 - 36x_1 - 360 - 110x_2 - 9\cdot 110 + 50x_1 - 500 - 4x_2 - 36 -$

$- 99x_3 - 4\cdot 99 = 0$

$14x_1 - 114x_2$

$\begin{vmatrix} -16-x_1 & 11 & -1 \\ -9-x_2 & 5 & 9 \\ -4-x_3 & -4 & -10 \end{vmatrix} = 0$

~~1986/III~~ 1986/IV

~~3a)~~

2a) $\begin{vmatrix} x_1+10 & 11+10 & -1+10 \\ x_2+9 & 5+9 & 9+9 \\ x_3+4 & -4+4 & -16+4 \end{vmatrix} = 0$

$-14(x_1+10)\cdot 6 + 21\cdot 18\cdot(x_3+4) + \cancel{9(x_2+9)} - (x_3+4)\cdot 14\cdot 9 +$
$+ (x_2+9)\cdot 21\cdot 6 = 0$

$\cancel{-84x_1 - 840}\quad -2(x_1+10)\cdot\cancel{42} + \cancel{9\cdot 6}\cdot(x_3+4) - (x_3+4)\,3\cdot\cancel{42} +$
$+ (x_2+9)\cdot 3\cdot\cancel{42} = 0$

$-2x_1 - 20 + 9x_3 + 36 - 3x_3 + 12 + 3x_2 + 27 = 0$
$-2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 31 = 0$

2b) HNF

$$\frac{2x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 31}{\sqrt{4+9+36}} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2/7 \\ -3/7 \\ -6/7 \end{pmatrix}\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -10 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$d = \left|\begin{pmatrix} 2/7 \\ -3/7 \\ -6/7 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}\right)\right|$$

$$d = \left|\begin{pmatrix} 2/7 \\ -3/7 \\ -6/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}\right| = \left|-\frac{2}{7} - \frac{12}{7} - \frac{6\cdot 14}{7}\right| = \frac{98}{7} = 14$$

1b) $w: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda\left[(\vec{a}-\vec{c})^0 + (\vec{b}-\vec{c})^0\right]$

$\cancel{(\vec{a}-\vec{c})^0} = \cancel{(\quad)}$ $\quad \vec{a}-\vec{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{u}^0 = \begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ 6 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{9\cdot 9+36+18^2}} = \begin{pmatrix} -3/7 \\ -6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}$

$\vec{b}-\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{v}^0 = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{144+36+16}} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ -2/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$

$w: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 3/7 \\ -8/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu\,\vec{AB} = \begin{pmatrix} -10 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 21 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt: $\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$-1+3\lambda = -10+3\mu$$

$$9-8\lambda = -9+2\mu$$

$$-10+5\lambda = -4$$

$$5\lambda = 6$$

$$\lambda = \frac{6}{5}$$

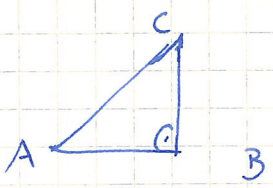
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} + \frac{6}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}6 \\ -0{,}6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

~~2c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$~~

86/ III 1,2

1.)

a) $\begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\8\\-5\end{pmatrix}$



$0 = 2 + \lambda \Rightarrow \lambda = -2$

$6 = -2 + 8\lambda \Rightarrow \lambda = 1$ f

$\Rightarrow B \in AC$

b) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$

$\left[\begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix}\right] \cdot \left[\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}\right] = 0$

$\begin{pmatrix}-2\\8\\6-5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix} = 0$

$-6 + (6-5)6 = 0$

$-6^2 + 5 \cdot 6 = 6$

$6 = 3$

2.)

a) $A = |\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \frac{1}{2} = \left|\begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix}\right| \cdot \frac{1}{2} =$

$= \sqrt{4 + 64 + 4} \cdot \sqrt{9 + 9} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{72} \cdot \sqrt{18} \cdot \frac{1}{2} = 18$

b) $\begin{vmatrix} 2-x_1 & 0 & 3 \\ -2-x_2 & 6 & 6 \\ 5-x_3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$9(-2-x_2) - 18(5-x_3) - 18(2-x_1) = 0$

$-18 - 9x_2 - 90 + 18x_3 - 36 + 18x_1 = 0$

$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 16 = 0$

3a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\7\\4\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x_1-2 & 0 & 3 \\ x_2+2 & 6 & 6 \\ x_3-5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

0

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0-2\\6+2\\3-5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3-2\\6+2\\0-5\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x_1-2 & -2 & 1 \\ x_2+2 & 8 & 8 \\ x_3-5 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$-40(x_1-2) - 16(x_3-5) - 2(x_2+2) - 8(x_3-5) + 16(x_1-2) - 10(x_2+2) = 0$$

$$-40x_1 + 80 - 16x_3 + 80 - 2x_2 - 4 - 8x_3 + 40 + 16x_1 - 32 - 10x_2 - 20 = 0$$

$$-24x_1 - 12x_2 - 24x_3 + 148 = 0$$

3a) $\cos\varphi = \dfrac{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{6+2-8}{\dots} = 0$

$\Rightarrow$ Normalenvektor & Richtungsvektor $\perp$ $\Rightarrow$ g, E parallel

b) $V = \frac{1}{3}\cdot A\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 18\cdot h$

~~Ebene~~ HNF: $\dfrac{2x_1 + x_2 + 2x_3 - 12}{\sqrt{4+1+4}} = 0$

$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - 4 = 0$$

$$\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}\right) = 0$$

$$|h| = \left|\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}3\\7\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}\right)\right| = |3| = 3$$

$>0 \Rightarrow$ auf der dem Ursprung entgegengesetzten Seite

$V = 18$

c) ~~Gerade durch P: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\7\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}$~~

$\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$; in ~~parameterfreier~~ HNF:

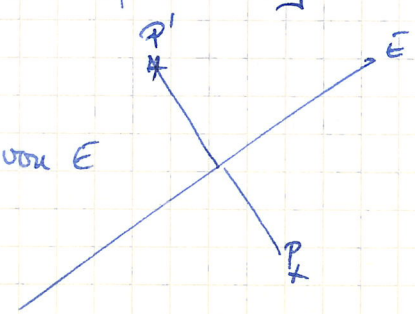
$$\left[\left|\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}\right)\right| = \left|\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-5\\2\end{pmatrix}\right| = \left|-\frac{2}{3} - \frac{5}{3} + \frac{4}{3}\right| = |-1|\right]$$

Richtung des Normalenvektors?

$\vec{P}, \vec{0}$ auf versch. Seiten von E

$\vec{P'} = \vec{P} \pm 6\cdot\vec{n^0}$

Normalenvektor bei HNF vom Ursprung weg



4. Abstände

1. Punkt - Punkt

$$d = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2}$$

2. Punkt - Ebene

P in HNF(E)

3. Gerade - Ebene

$g \parallel E$

P_g in HNF(E)

4. ~~Ger~~ Ebene - Ebene

P_{E_1} in HNF(E_2)

$E_1 \parallel E_2$

5. Punkt - Gerade

a) im $\mathbb{R}^2$

P in HNF(g)

b) im $\mathbb{R}^3$

$d = |\vec{PF}|$, F Lotfußpunkt auf g

F: Lotebene auf g × g

z.B.: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

$E(2|5|1)$

Lotebene L: $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}\right) = 0 = -2x_1 + x_2 - 1$

g in L:

$-2(-1-2\lambda) + (-3+\lambda) - 1 = 0$

$\lambda = \frac{2}{5}$

in g: $\vec{F} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\5\end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/5\\-13/5\\5\end{pmatrix}$

$d(P,g) = |\vec{PF}| = \sqrt{\dots}$

INFINITESIMALRECHNUNG

86/II

$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$y=0 \quad x^2+3=0 \Rightarrow x^2=-3 \Rightarrow$ kein Schnitt mit x-Achse

$x=0 \quad y=\frac{3}{1}=3 \quad S(0|3)$

Senkrechte Asymptote $x=1$

Schräge Asymptote: $(x^2+3):(x+1) = x-1+\frac{4}{x+1}$

$+(x^2+x)$

$-x+3$

$-(-x-1)$

4

$y = x-1$

$f'(x) = \frac{(x+1)2x-(x^2+3)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0: \quad x^2+2x-3=0; \quad (x-1)(x+3)=0 \quad ; x_1=1, x_2=-3$

$-\infty < x < -3 : \quad f'(x)>0 \Rightarrow f$ s.m.s. Max $(-3|-6)$

$-3 < x < -1 : \quad f'(x)<0 \Rightarrow f$ s.m.f.

$-1 < x < 1 : \quad f'(x)<0 \Rightarrow f$ s.m.f. Min $(1|2)$

$1 < x < \infty : \quad f'(x)>0 \Rightarrow f$ s.m.s.

§3 Musteraufgaben

3.1 Die Winkelhalbierenden von Geraden (Ebenen)

a) über NF : $w_1 := g_{1H} + g_{2H}$

$w_2 := g_{1H} - g_{2H}$ (Ursprungsfeld)

b) über Parameterform

$g_1 : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$

$g_2 : \vec{x} = \vec{b} + \mu \vec{v}$ $\qquad g_1 \cap g_2 = \{S\}$

$w_1 : \vec{x} = \vec{s} + \sigma (\vec{u}^0 + \vec{v}^0)$

$w_2 : \vec{x} = \vec{s} + \tau (\vec{u}^0 - \vec{v}^0)$

3.2 Spiegelung

1) Punkt P an Ebene:

l Lotgerade auf Ebene E

$l \cap E = \{F\}$

$\vec{P'} = \vec{P} + 2 \cdot \vec{PF}$

186/2~~6~~,3 ; 187/11

$\vec{a}' = \vec{a} \pm 2 d \vec{n}^0$

"+", wenn $d < 0$ (auf $\binom{0}{0}$-Seite)

"−", wenn $d > 0$

2) Gerade an Ebene:

a) g parallel E $\qquad g : \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u}$

Aufhängepunkt spiegeln $\Rightarrow P'$

$g' : \vec{x} = \vec{p}' + \lambda \vec{u}$

b) g schneidet E

$g \cap E = \{S\}$

$P \in g$, P spiegeln an E $\Rightarrow P'$

$g' : \vec{x} = \vec{p}' + \mu (\vec{s} - \vec{p}')$

) Ebene an Ebene:

~~Pe~~ a) E_1 parallel E_2

wie 2a)

b) E_1 schneidet E_2:

$E_1 \cap E_2 = s$

wie ~~zu~~ 2b)

Orthogonale Projektion

1. Punkt auf Ebene

$E: \vec{u}(\vec{x}-\vec{a}) = 0$

$P(\vec{p})$

$l: \vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u}$

$l \cap E = \{F\}$

186/2a

2. Gerade auf Ebene

a) $E \parallel g$

$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

$E: \vec{u}(\vec{x}-\vec{b}) = 0$

orthogonale Projektion von $\vec{a}$ auf E (siehe 1.) ergibt $\vec{a'}$

/3b

$g': \vec{x} = \vec{a'} + \lambda\vec{u}$

b) $E \cap g = \{S\}$

/3a

$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

$E: \vec{u}(\vec{x}-\vec{b}) = 0$

$g \cap E = \{S\}$

Projektion von A auf E: A'

$g': \vec{x} = \vec{s} + \mu(\vec{a'}-\vec{s})$

3. Punkt auf Gerade

$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

$P(\vec{p})$

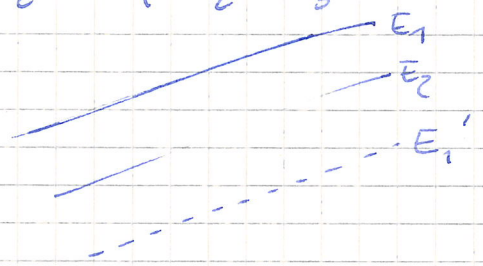
/12

Lotebene: $L: \vec{u}(\vec{x}-\vec{p}) = 0$

$L \cap g = \{F\}$

$E_1: x_1 + x_2 - 2x_3 + 1 = 0$; $P(-1|0|0) \in E_1$

$E_2: x_1 + x_2 - 2x_3 - 2 = 0$



$$d_{E_1E_2} = d_{P,E_2} = \frac{-1-2}{\sqrt{6}} = \frac{-3}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow d_{E_1'} = \frac{+3}{\sqrt{6}}$$

$$E_1': \frac{+3}{\sqrt{6}} = \vec{n_0}\left(\vec{x} - \vec{p}\right) = \frac{p_1 + p_2 - 2p_3 - 2}{\sqrt{6}}$$

$$E_1': x_1 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0$$